МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Приложение 2
к рабочей программе дисциплины

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

Дискретная математика
(наименование дисциплины(модуля)

Направление подготовки / специальность

27.03.05 Инноватика
(код и наименование)

Направленность (профиль)/специализация

Управление инновациями
(наименование)

Содержание

1. Пояснительная записка

Цель промежуточной аттестации – оценивание промежуточных и окончательных результатов обучения по дисциплине, обеспечивающих достижение планируемых результатов освоения образовательной программы.

Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения дисциплины

Код и наименование компетенции	Код индикатора достижения компетенции
ОПК-1.1: Применяет методы высшей математики для решения задач профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.1**Знает способы задания, свойства множеств, отношений, функций и отображений; канонические формы представления, методы преобразования и минимизации булевых функций; методы осуществления операций над графами и выполнения количественных оценок их характеристик; стандартные и рекурсивные схемы алгоритмов, структуры и потоки данных
	ОПК-1.1.2Использует символику дискретной математики для выражения количественных и качественных отношений объектов; методы дискретной математики при решении задач синтеза цифровых устройств и разработке программного обеспечения
	ОПК-1.1.3 Владеет методами дискретной математики при решении задач синтеза цифровых устройств и разработке программного обеспечения; имеет представление о перспективах использования методов дискретной математики при разработке моделей систем автоматики и вычислительной техники

Результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	Оценочные материалы
ОПК-1.1: Применяет методы высшей математики для решения задач профессиональной деятельности	**ОПК-1.1.1**Знает способы задания, свойства множеств, отношений, функций и отображений; канонические формы представления, методы преобразования и минимизации булевых функций; методы осуществления операций над графами и выполнения количественных оценок их характеристик; стандартные и рекурсивные схемы алгоритмов, структуры и потоки данных	Задание 1-5
	ОПК-1.1.2Использует символику дискретной математики для выражения количественных и качественных отношений объектов; методы дискретной математики при решении задач синтеза цифровых устройств и разработке программного обеспечения	Задание 6-10
	ОПК-1.1.3 Владеет методами дискретной математики при решении задач синтеза цифровых устройств и разработке программного обеспечения; имеет представление о перспективах использования методов дискретной математики при разработке моделей систем автоматики и вычислительной техники	Задание 11

Промежуточная аттестация (зачет) проводится в одной из следующих форм:
1) собеседование;
2) выполнение заданий в ЭИОС СамГУПС.

2. Типовые[1] контрольные задания или иные материалы для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих уровень сформированности компетенций

2.1 Типовые вопросы (тестовые задания) для оценки знаниевого образовательного результата

Проверяемый образовательный результат

Код и наименование индикатора достижения компетенции	Образовательный результат
ОПК-1.1.1	Знает методы высшей математики для решения задач профессиональной деятельности
1. Перечислите элементы следующего множества B ={x | x $\in$ Z и 6x^2 + x – 1 = 0}. 2. Запишите булеан P(A) множества A = {0,-1, -2, -3}. 3. Задайте с помощью характеристического свойства множество A = {2, 5, 8, 11, …}. 4. Для заданного множества $A \subseteq U$ составить характеристический вектор: U={1,2,3,…,20}, A={x| 5|(x+3) }. 5. Доказать равенство множеств, преобразуя множества к одинаковому виду с помощью основных законов алгебры множеств: $(A \cap B) \cup (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \cup A$.	
ОПК-1.1.2	Использует символику дискретной математики для выражения количественных и качественных отношений объектов; методы дискретной математики при решении задач синтеза цифровых устройств и разработке программного обеспечения
6. Доказать тождество (тремя способами): $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} = A \cap B$. 7. Доказать тождество: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ 8. Составьте матрицу данного бинарного отношения: $\rho \subseteq \{1,2,3...,7\}^2, (x,y) \in \rho \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$ 9. Бинарное отношение между множествами A = {1, 2, 3, 4} и B = {a, b, c, d} задано матрицей. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Выпишите элементы этого отношения и постройте его изображение. 10. Дано бинарное отношение $\rho = \{(x,y) \mid x,y \in N, y \mid x\}$, найдите $D_\rho, E_{\rho,}, \rho^{-1}, \rho \circ \rho, \rho^{-1} \circ \rho$	
ОПК-1.1.3	Владеет методами дискретной математики при решении задач синтеза цифровых устройств и разработке программного обеспечения; имеет представление о перспективах использования методов дискретной математики при разработке моделей систем автоматики и вычислительной техники
11. Построить таблицу истинности, СДНФ, СКНФ, полином Жегалкина для следующих булевых функций, заданных формулами: 1) $\overline{(\overline{x} \cup y) \cup x \cdot \overline{z}} \downarrow (x \sim y)$,	

[1]Приводятся типовые вопросы и задания. Оценочные средства, предназначенные для проведения аттестационного мероприятия, хранятся на кафедре в достаточном для проведения оценочных процедур количестве вариантов. Оценочные средства подлежат актуализации с учетом развития науки, образования, культуры, экономики, техники, технологий и социальной сферы. Ответственность за нераспространение содержания оценочных средств среди обучающихся университета несут заведующий кафедрой и преподаватель – разработчик оценочных средств.

2) $\bar{x} \to (\bar{z} \sim (y \oplus x \cdot z))$,

3) $(x \cup y \cup z) \to (x \cup y) \cdot (x \cup z)$,

4) $\overline{(x \to y) \cup (x \to z) \cdot y}$,

5) $x\bar{y} \cdot (\bar{y} \to x\bar{z})$,

6) $((x_1 \to x_2 x_3) \cdot (x_2 x_4 \oplus x_3) \to x_1 \bar{x}_4) \cup \bar{x}_1$,

7) $((x_1 \to x_2) \cup \bar{x}_3) \mid x_1$,

8) $((x_3 \to x_2) \cup x_1) \cdot (x_2 \to x_1) x_3 \bar{x}_1 \oplus x_3$,

9) $(x_1 \to (x_1 \cup x_2)) \to x_3$,

10) $\overline{(x \to y) \to xz} \to (y \to z)$,

11) $(\bar{x} \cup y \cup z) \cdot t \cup \bar{x} y \bar{z}$,

12) $(x \cup \bar{y} \cup z) \cdot t \cup \bar{x} yz$,

13) $(x \downarrow y) \to (x \oplus z)$,

14) $xy \cup xz \cup yt \cup zt$,

15) $(x \to y) \oplus ((x \downarrow y) \mid (\bar{x} \sim yz))$,

16) $(\bar{x} \cup y \cup (y\bar{z} \oplus 1)) \to (y \cup x)$,

17) $(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1) \sim x_3$,

18) $((x \oplus y) \sim z) \,\&\, (x \to yz)$,

19) $((x \oplus y) \to (x \cup y)) \cdot ((\bar{x} \to y) \to (x \oplus y)) \mid z$,

20) $\overline{(x \to y) \to xz} \to (y \to z)$,

21) $(x \cup \bar{y} \cup z) \cdot t \cup \bar{x} yz$,

22) $(x \downarrow y) \to (x \oplus z)$,

23) $(\bar{x} \cup y \cup \bar{z}) \cdot t \cup \bar{x} y \bar{z}$,

24) $(x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1) \sim x_3$,

25) $(x_1 \mid x_2) \to x_3 \downarrow x_2$.

2.2 Теоретические сведения и типовые задания:

1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. 1. Элементы и множества

Человеческое мышление устроено так, что мир представляется состоящим из отдельных «объектов». Философам давно ясно, что мир – единое неразрывное целое, и выделение в нем объектов – это не более чем произвольный акт нашего мышления, позволяющий сформировать доступную для рационального анализа картину. Но как бы там ни было, выделение объектов и их совокупностей – естественный способ организации нашего мышления, поэтому не удивительно, что он лежит в основе главного инструмента описания точного знания – математики.

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий математики. О множестве известно как минимум, что оно состоит из элементов. Для определенности остановимся на следующем определении.

Определение.Под ***множеством****S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются* ***элементами множества****S.*

Определение.Под множеством понимают объединение в единое целое определенных вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого ими множества.

Обычно множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, …; а элементы множеств – строчными буквами: a, b, c,… .

Если объект x является элементом множества M, то говорят, что x *принадлежит* M: $x \in M$. В противном случае говорят, что x *не принадлежит* M: $x \notin M$.

В этом интуитивном определении, принадлежащем немецкому математику Г. Кантору, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые могут входить в множество, то относительно них существует значительная свобода.

Пример 1. Это может быть множество студентов, присутствующих на лекции, множество четных чисел и т. д.

Определение. Множество A называется ***подмножеством*** *множества B, если всякий элемент из A является элементом B. Если A является подмножеством B и B не является подмножеством A, то говорят, что A является* ***строгим (собственным) подмножеством*** *B.*

В первом случае обозначают $A \subseteq B$, во втором случае $A \subset B$.

Определение. Множество, не содержащее элементов, называется ***пустым*** *∅, оно является подмножеством любого множества. Множество U называется* ***универсальным****, то есть все рассматриваемые множества являются его подмножеством.*

Рассмотрим два определения равенства множеств.

Определение. ***Множества*** *A и B считаются****равными****, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут A=B, A≠B – в противном случае.*

Определение. ***Множества*** *A и B считаются****равными****, если* $A \subset B$ *и* $B \subset A$.

Способы задания множеств:

- ***перечислением элементов****:* $M=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$*, т. е. списком своих элементов;*
- ***характеристическим предикатом****:* $M=\{x \mid P(x)\}$*(описанием характеристических свойств, которыми должны обладать его элементы);*
- ***порождающей процедурой****:* $M=\{ x \mid x=f\}$*, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки.*

*Замечание.*При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми. Перечислением можно задавать только ***конечные множества*** (число элементов множества конечно, в противном случае множество называется бесконечным). Характеристический предикат – это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит. Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества. ***Бесконечные множества*** задаются характеристическим предикатом или порождающей процедурой.

Пример 2.

1. M={1, 2, 3, 4} – перечисление элементов множества.

2. $\grave{I} \;= \{\grave{o} \mid m \in N\, \grave{e}\, \grave{o} \le 10\}$ *- характеристический предикат.*

3. Числа Фибоначчи задаются условиями (порождающей процедурой):

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ *для* $n>2$.

Определение. ***Мощность*** *конечного множества A - это число его элементов.*

Мощность множества обозначают |A|.

Пример 3.

$|\varnothing|=0$, $|\{\varnothing\}|=1$.

Определение. Множества называются ***равномощными****, если их мощности совпадают.*

Определение. Множество всех подмножеств множества A называется ***булеаном****P(A).*

Известно, что если множество *A* содержит *n* элементов, то множество *P(A)* содержит 2^n элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества *A* в виде 2^A.

Пример 4.

A={0, 1, 2}, P(A)={ $\varnothing$*, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}.*

1.2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна

Диаграммы Эйлера-Венна – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество *U*, а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

Определение. ***Объединением*** *множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B (рис. 1):*

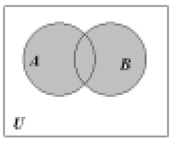


Рис. 1.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Определение. ***Пересечением*** *множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A, так и множеству B (рис. 2):*

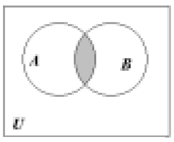


Рис. 2.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Определение. ***Разностью*** *множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A, которые не содержатся в B (рис. 3):*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

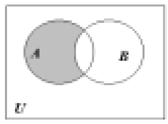


Рис. 3.

Определение. ***Симметрической разностью*** *множеств A и B называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству A, либо только множеству B (рис. 4):*

$$A + B = \{x \mid \text{либо } x \in A, \text{ либо } x \in B\}.$$

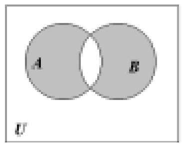


Рис. 4.

Определение. ***Абсолютным дополнением*** *множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству A (рис. 5):*

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

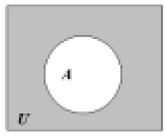
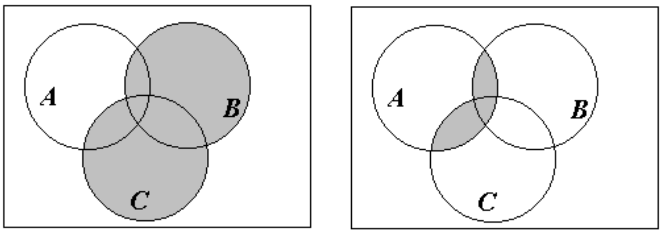


Рис. 5.

Пример 5. С помощью диаграмм Эйлера – Венна проиллюстрируем справедливость



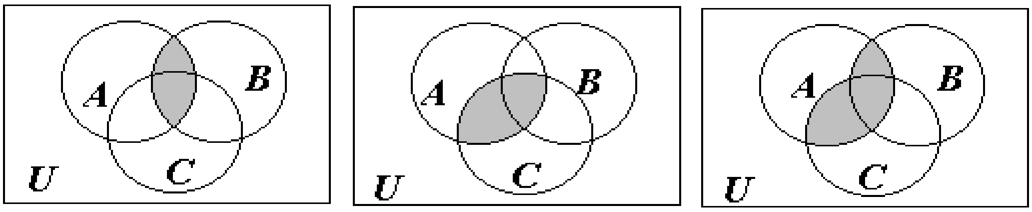
соотношения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (рис. 6).

$B \cup C$ $\quad$ $A \cap (B \cup C)$

$A \cap B$ $\quad$ $A \cap C$ $\quad$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Рис. 6.

Убедились, что в обоих случаях получаем равные множества. Следовательно, исходное



соотношение справедливо.

1.3. Основные тождества алгебры множеств

Для произвольных множеств A, B, и C справедливы следующие соотношения (табл. 1):

Таблица 1

1. Коммутативность объединения $A \cup B = B \cup A$	1’. Коммутативность пересечения $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность объединения $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	2’. Ассоциативность пересечения $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3’. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cup \varnothing = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cup U = U$	4’. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cap U = A$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. Закон идемпотентности объединения $A \cup A = A$	5’. Закон идемпотентности пересечения $A \cap A = A$
6. Закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	6’. Закон де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
7. Закон поглощения $A \cup (A \cap B) = A$	7’. Закон поглощения $A \cap (A \cup B) = A$
8. Закон склеивания $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$	8’. Закон склеивания $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$
9. Закон Порецкого $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$	9’. Закон Порецкого $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$
10. Закон двойного дополнения $\overline{\overline{A}} = A$	

Пример 6.

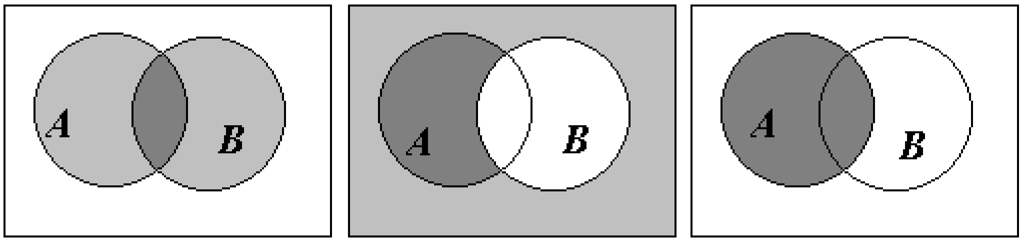
Доказать следующее тождество $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Решение.

Докажем это тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна).

1. $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=(A\cup(A\cap\overline{B}))\cap(B\cup(A\cap\overline{B}))=A\cap((B\cup A)\cap(B\cup\overline{B}))=A\cap((B\cup A)\cap U)=$
$=A\cap(B\cup A)=A$

2. Построим соответствующие диаграммы Эйлера-Венна (рис. 7).



$A\cap B$ $\quad$ $A\cap\overline{B}$ $\quad$ $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$

Рис. 7.

1.4. Прямое произведение множеств. Отношения и функции

Определение. ***Упорядоченная пара*** *<x, y> интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Две пары <x, y>, <u, v> считаются равными тогда и только тогда, когда x=u, y=v.*

Упорядоченная n-ка элементов $x_1, \ldots, x_n$ *обозначается* $<x_1, \ldots, x_n>$.

Определение. ***Прямым произведением*** *множествX и Y называется множество* $X\times Y$, *элементами которого являются все возможные упорядоченные пары <x, y>, такие, что* $x\in X, y\in Y$.

Определение. ***Прямым произведением*** *множеств* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *называется совокупность всех упорядоченных n-ок* $<x_1, \ldots, x_n>$ *таких, что* $x\in X_1,\ldots,x_n\in X_n$. *Если* $X_1=X_2=\ldots X_n$, *то пишут* $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=X^n$.

Пример 7.

1. Пусть *X={1, 2, 3}*, *Y={0, 1}*. Тогда $X\times Y=\{\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$; $Y\times X=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$.

2. Пусть X – множество точек отрезка [0, 1], а Y – множество точек отрезка [1, 2]. Тогда $X\times Y$ - множество точек квадрата$[0,1]\times[1,2]$с вершинами в точках (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1,2).

Определение. ***Бинарным*** *(или двуместным)* ***отношением*** $\boldsymbol{\rho}$ *называется множество упорядоченных пар.*

Если ρ есть отношение и пара *<x, y>* принадлежит этому отношению, то наряду с записью *<x, y>* $\in\rho$ употребляется запись $x\rho y$. Элементы *x* и *y* называются координатами (или компонентами) отношения ρ.

Определение. ***N-арным отношением*** *называется множество упорядоченных n-ок.*

Определение. ***Областью определения*** *бинарного отношения* ρ *называется множество*
$D_\rho = \{x \,|\, \text{ñóùåñòâóåò òàêîå ó, ÷òî } x\rho y\}.$

Определение. ***Областью значений*** *бинарного отношения* ρ *называется множество*
$\text{Å}_\rho = \{\text{ó} \,|\, \text{ñóùåñòâóåò òàêîå õ, ÷òî } x\rho y\}.$

Пусть $\rho \subseteq X \times Y$определено в соответствии с изображением на рисунке 8 . Область определения D_ρ и область значений E_ρ определяются соответственно:

$D_\rho=\{x: (x, y) \in\rho\}$, $E_\rho=\{y: (x,y)\in\rho\}$.

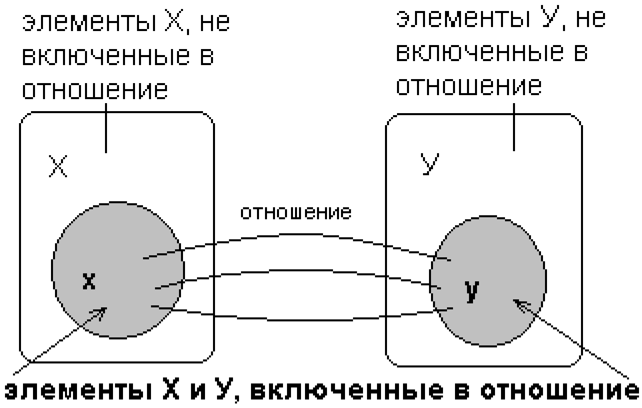


Рис. 8.

Бинарное отношение можно задать любым из способов задания множеств.Помимо этого отношения, определенные на конечных множествах обычно задаются:

1. *списком (перечислением) пар*, для которых это отношение выполняется.
2. *матрицей* – бинарному отношению соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-той строки и j-го столбца, равен 1, если a_i и a_j имеет место отношение, или 0, если оно отсутствует.

Пример 8.

Пусть M=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Задать в явном виде (списком) и матрицей отношение ρ, заданное на множестве $M \times M$, если ρ означает «быть строго меньше».

Отношение ρ как множество содержит все пары элементов a, b из M такие, что $a<b$. Тогда

ρ = *{(1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}*.

Матрица отношения имеет вид:

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Определение. Бинарное отношение f называется **функцией**, если из* $<x, y> \in f$ *и* $<x, z> \in f$ *следует, что* $y=z$.

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то две функции f и g равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Область определения функции обозначается D_f, а область значений – R_f. Определяются они так же, как и для бинарных отношений.

Если f – функция, то вместо $<x, y> \in f$ пишут $y=f(x)$ и говорят, что y – значение, соответствующее аргументу x, или y – образ элемента x при отображении f. При этом x называется прообразом элемента y.

*Определение. Назовем f **n-местной функцией** из X в Y если* $f:X^n \to Y$. *Тогда пишем* $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и говорим, что y – значение функции при значении аргументов* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пусть $f:X \to Y$.

*Определение. Функция f называется **инъективной**, если для любых* x_1, x_2, y *из* $y=f(x_1)$ *и* $y=f(x_2)$ *следует, что* $x_1=x_2$, *то есть каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента.*

*Определение. Функция f называется **сюръективной**, если для любого элемента* $y \in Y$ *существует элемент* $x \in X$ *такой, что* $y=f(x)$.

*Определение. Функция f называется **биективной**, если f одновременно сюръективна и инъективна.*

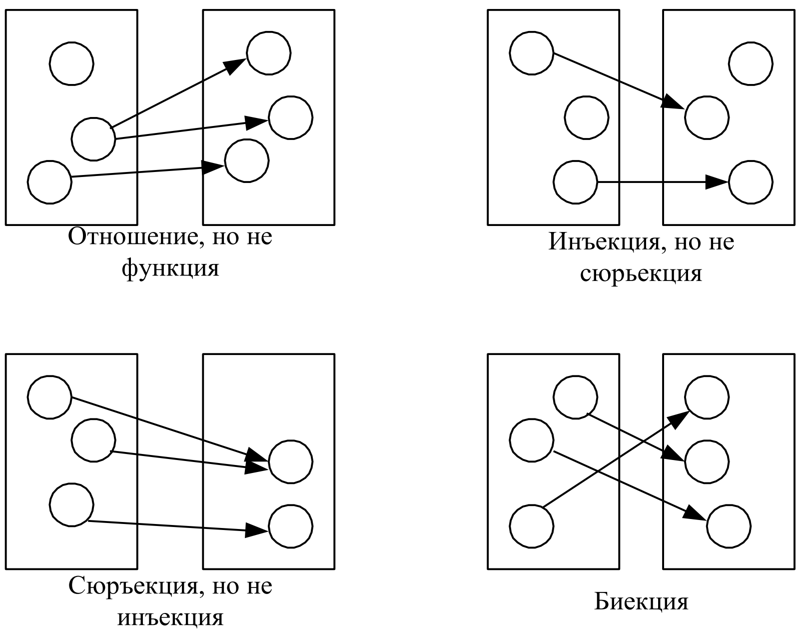


Рис. 9.

Рисунок 9 иллюстрирует понятия отношения, функции, инъекции, сюръекции и биекции.

Пример 9.

Рассмотрим три функции, заданные на множестве действительных чисел и принимающих значение в этом же множестве:

1. функция $f(x)=e^x$ - инъективна, но не сюръективна;
2. функция $f(x)=x^3-x$ – сюръективна, но не инъективна;
3. функция $f(x)=2x+1$ – биективна.

Определение. ***Суперпозиция функций*** *– функция, полученная из системы функций $f, f_1, f_2, \ldots, f_k$ некоторой подстановкой функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$ во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.*

Пример 10.

Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

1.5. Свойства бинарных отношений. Специальные бинарные отношения

Определение. Отношение ρ на множестве X называется ***рефлексивным****, если для любого элемента $x \in X$ выполняется $x\rho x$.*

Определение. Отношение ρ на множестве X называется ***симметричным****, если для любых x, $y \in X$ из $x\rho y$ следует $y\rho x$.*

Определение. Отношение ρ на множестве X называется ***транзитивным****, если для любых x, y, $z \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$.*

Определение. Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение на множестве X называется отношением ***эквивалентности*** *на множестве X.*

Пример 11.

1. Отношение равенства на множестве целых чисел есть отношение эквивалентности.

2. Отношение подобия на множестве треугольников есть отношение эквивалентности.

3. Отношение «строго меньше» на множестве действительных чисел не рефлексивно, не симметрично и транзитивно на этом множестве.

4. Отношение перпендикулярности прямых не рефлексивно, симметрично, не транзитивно.

Пусть ρ - отношение эквивалентности на множестве X.

Определение. ***Классом эквивалентности****, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in Y$, для которых $x\rho y$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается через $[x]$:* $[x] = \{y \mid y \in X \text{ и } x\rho y\}$.

Определение. Отношение ρ на множестве X называется ***антисимметричным****, если для любых x, $y \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho x$ следует $x=y$.*

Определение. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется ***отношением частичного порядка*** *на множестве X.*

Пример 12.

1. Отношение «$x \le y$» на множестве действительных чисел есть отношение частичного порядка.

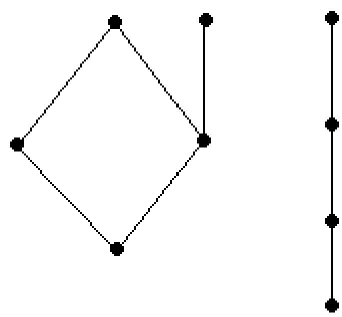


Рис. 10.

2. Схема организации подчинения в учреждении есть отношение частичного порядка на множестве должностей.

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости, и если y покрывает x, то точки x и y соединяют отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y. Такие схемы называются диаграммами Хассе. На рис. 10 показаны две диаграммы Хассе, причем вторая соответствует линейно упорядоченному множеству.

1.6. Операции над бинарными отношениями

Так как отношения на X задаются подмножествами $\rho \subseteq X \times Y$, для них определимы те же операции, что и над множествами:

1. *Объединение* $\rho_1 \cup \rho_2$: $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \rho_1$ *или* $(x, y) \in \rho_2\}$.
2. *Пересечение* $\rho_1 \cap \rho_2$: $\rho_1 \cap \rho_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \rho_1$ *и* $(x, y) \in \rho_2\}$.
3. *Разность* $\rho_1 \setminus \rho_2$: $\rho_1 \setminus \rho_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \rho_1$ *и* $(x, y) \notin \rho_2\}$.
4. *Дополнение* $\overline{\rho}$: $\overline{\rho} = U \setminus \rho$, ãäå $U = M_1 \times M_2$ (èëè $U = M^2$).
5. *Обратное отношение* ρ^{-1}: $x \rho^{-1} y$ тогда и только тогда, когда $y \rho x$, $\rho^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \rho\}$.

Пример 13.

Если ρ - «быть моложе», то ρ^{-1} – «быть старше».

6. *Составное отношение (композиция)* $\rho_1 \bullet \rho_2$. Пусть заданы множества M_1, M_2 и M_3 и отношения $R_1 \subseteq M_1 \times M_2$ и $R_2 \subseteq M_2 \times M_3$. Составное отношение действует из M_1 в M_2 посредством R_1, а затем из M_2 в M_3 посредством R_2, то есть $(a, b) \in R_1 \bullet R_2$, если существует такое $c \in M_2$, что $(a, c) \in R_1$ и $(a, c) \in R_2$.
7. *Транзитивное замыкание* ρ°. Транзитивное замыкание состоит из таких и только таких пар элементов a и b из M, то есть $(a, b) \in \rho^{\circ}$, для которых в M существует цепочка из $(k+2)$ элементов M, $k \geq 0$, что $a, c_1, c_2, \dots c_k, b$, между соседними элементами которой выполняется ρ. Другими словами $a \rho c_1$, $c_1 \rho c_2$, …, $c_k \rho b$.

Пример 14.
Для отношения «быть сыном» транзитивным замыканием является отношение «быть прямым потомком по мужской линии».

1.7. Алгебраические операции

Пусть дано множество M.

Определение. Говорят, что на M определена ***бинарная алгебраическая операция****, если всякой упорядоченной паре элементов множества M по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенный элемент этого же множества.*

Примерами бинарных операций на множестве целых чисел являются сложение и умножение. Однако нашему определению не удовлетворяют, например, множество отрицательных чисел относительно умножения и множество действительных чисел относительно деления из-за невозможности деления на нуль.

Среди известных бинарных операций, производимых не над числами, можно отметить векторное умножение векторов пространства, умножение квадратных матриц порядка n, композицию отображений множества X в себя, теоретико-множественное объединение и пересечение множеств.

Таблица 2

Фактическое задание алгебраической операции на множестве может быть произведено различными методами. Возможно также непосредственное перечисление всех результатов операций для конечных множеств. Его удобно описать с помощью, так называемой таблицы Кэли (табл.2). Слева и сверху квадратной таблицы выписывают все элементы множества. На пересечении строки, соответствующей элементу a, и столбца, соответствующего элементу b, записывают результат операции над a и b.

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	x_2	x_3	x_1	x_1
x_3	x_2	x_3	x_1	x_2
x_4	x_4	x_2	x_1	x_3

Будем употреблять следующую терминологию и символику: операцию называть умножением, а результат применения операции к элементам a и b – произведением ab.

Определение. Если для любых элементов a *и* b *множества M справедливо равенство* $ab = ba$, *то операцию называют коммутативной.*

Определение. Если для любых элементов a, b, c *множества M справедливо равенство* $a(bc) = (ab)c$, *то операцию называют ассоциативной.*

В ряде случаев множество М, на котором определена алгебраическая операция, обладает единичным элементом, т. е. таким элементом e, что $ae = ea = a$ для всех a из М. Единичный элемент единственен.

Теорема. Если операция, определенная на M, ассоциативна, то результат ее последовательного применения к n *элементам множества не зависит от расстановки скобок.*

2.3. Перечень вопросов для подготовки обучающихся к промежуточной аттестации
ЗАДАНИЕ (практическое) **к зачету:**

1. Дискретная математика как наука. Области ее применения.
2. Понятие множества. Мощность множества. Способы задания множества.
3. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение). Диаграммы Эйлера-Венна (изображение операций над множествами).
4. Свойства операций над множествами. Доказательства свойств.
5. Булеан множества. Теорема: $|P(X)| = 2^n$ с доказательством. Алгоритм построения булеана.
6. Декартово произведение множеств. N-местное отношение. Бинарное отношение. Примеры.
7. Область определения бинарного отношения. Область значений бинарного отношений. Обратное отношение для бинарного отношения. Образ множества. Прообраз множества.
8. Матрица бинарного отношения. Ее свойства.
9. Свойства бинарных отношений. Определение свойств бинарных отношений матричным методом.
10. Функция. Частичная функция. Инъекция. Сюръекция. Биекция.
11. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности.
12. Покрытие множества. Разбиение множества. Фактор-множество.
13. Теорема о связанности разбиения множества и отношения эквивалентности с доказательством.
14. Классификация отношений. Отношения частичного порядка. Топологическая сортировка. Диаграммы Хассе.
15. Комбинаторика, ее основные задачи. Правило суммы. Правило произведения.

16. Число размещений без повторений. Доказательство. Число размещений с повторениями. Доказательство.
17. Число сочетаний без повторений. Доказательство. Число сочетаний с повторениями. Доказательство.
18. Биномиальные коэффициенты. Элементарные свойства биномиальных коэффициентов.
19. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Способы их использования.
20. Формула включения и исключения. Форма записи формулы включения и исключения с использованием свойств элементов множества.
21. Размещения заданного состава. Полиномиальная теорема.
22. Числа Фибоначчи, их свойства
23. Основные определения теории вероятностей. Классическое определение вероятности.
24. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса и ее использование.
25. Случайные величины и распределения вероятностей.
26. Математическое ожидание и дисперсия, их основные свойства.
27. Определение энтропии случайной схемы, ее свойства. Аксиоматическое определение энтропии.
28. Строковые данные в различных разделах математики и приложениях. Основные операции над строками.
29. Лексикографическое сравнение строк. Типичные задачи, решаемые со строками. Методы поиска образца в строке. Классификация функций от строк.
30. Графы. Основные понятия и определения. Способы представления.
31. Представление графов матрицами инцидентности и смежности. Свойства данных матриц.
32. Понятие связного графа, компоненты связности и сильной связности. Метрические характеристики графов.
33. Нагруженные графы. Постановка задачи коммивояжера.
34. Задача о кратчайшем пути в графе (алгоритм фронта волны, алгоритмы Форда-Беллмана и Дейкстры).
35. Деревья. Характеристическое свойство дерева. Алгоритм нахождения кратчайшего остовного дерева (алгоритм Краскала).
36. Алгоритм нахождения максимального потока. Теорема Форда-Фалкерсона.
37. Функциональные системы с операциями. Булева алгебра. Способы задания булевых функций. Элементарные функции булевой алгебры.
38. Булева алгебра Формулы булевой алгебры. Равносильные формулы. Двойственные функции. Принцип двойственности.
39. Представление булевых функций в классе СДНФ, СКНФ. Алгоритм построения СДНФ, СКНФ.
40. Полнота в алгебре логики. Примеры полных систем. Принцип суперпозиции.
41. Замкнутые классы алгебры логики (TO, T1, S, M, L).
42. Критерий функциональной полноты в алгебре логики. Теорема Поста.
43. Минимизация булевых функций в классе ДНФ. Интервал, максимальный интервал, простая импликанта. Сокращенная ДНФ. Минимальная ДНФ.Примеры использования алгоритмов минимизации.
44. Функциональная система: *k*-значная логика. Элементарные функции *k*-значной логики.
45. Определение кодирования. Свойства кодирования. Код сообщения. Побуквенное кодирование. Элементарные коды. Алфавитный код. Равномерное кодирование. Разделимый код.
46. Схема кодирования. Префиксный код. Взаимно однозначное кодирование. Критерий взаимной однозначности алфавитного кодирования.
47. Взаимно однозначное кодирование. Неравенство Крафта-Макмиллана. Коды с минимальной избыточностью.
48. Кодовое дерево. Насыщенная вершина кодового дерева. Насыщенное кодовое дерево. Исключительная вершина. Порядок ветвления исключительной вершины.

49.Бинарный код Хэмминга. Схема кодирования. Схема декодирования. Самокорректирующиеся коды Хэмминга.
50.Конечный автомат. Определение. Использование конечных автоматов в программировании.
51.Марковская цепь. Основные определения. Граф переходов. Классификация состояний марковской цепи.
52.Процесс принятия решений. Модель динамического программирования. Уравнение Беллмана. Процессы в информатике.
53.Производящие функции. Асимптотика.

3. Методические материалы, определяющие процедуру и критерии оценивания сформированности компетенций при проведении промежуточной аттестации

Критерии формирования оценок по ответам на вопросы, выполнению тестовых заданий

- оценка **«отлично»** выставляется обучающемуся, если количество правильных ответов на вопросы составляет 100 – 90% от общего объёма заданных вопросов;
- оценка **«хорошо»** выставляется обучающемуся, если количество правильных ответов на вопросы – 89 – 76% от общего объёма заданных вопросов;
- оценка **«удовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если количество правильных ответов на тестовые вопросы –75–60 % от общего объёма заданных вопросов;
- оценка **«неудовлетворительно»** выставляется обучающемуся, если количество правильных ответов – менее 60% от общего объёма заданных вопросов.

Критерии формирования оценок по результатам выполнения заданий

«Отлично/зачтено» – ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов.

«Хорошо/зачтено» – ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, не более трех недочетов.

«Удовлетворительно/зачтено» – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочетов, не более одной грубой и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и двух недочетов.

«Неудовлетворительно/не зачтено» – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки «удовлетворительно» или правильно выполнено менее 2/3 всей работы.

Виды ошибок:

- *грубые ошибки: незнание основных понятий, правил, норм; незнание приемов решения задач; ошибки, показывающие неправильное понимание условия предложенного задания.*
- *негрубые ошибки: неточности формулировок, определений; нерациональный выбор хода решения.*
- *недочеты: нерациональные приемы выполнения задания; отдельные погрешности в формулировке выводов; небрежное выполнение задания.*

Критерии формирования оценок по зачету с оценкой

«Отлично/зачтено» – студент приобрел необходимые умения и навыки, продемонстрировал навык практического применения полученных знаний, не допустил логических и фактических ошибок

«Хорошо/зачтено» – студент приобрел необходимые умения и навыки, продемонстрировал навык практического применения полученных знаний; допустил незначительные ошибки и неточности.

«Удовлетворительно/зачтено» – студент допустил существенные ошибки.

«Неудовлетворительно/не зачтено» – студент демонстрирует фрагментарные знания изучаемого курса; отсутствуют необходимые умения и навыки, допущены грубые ошибки.

Экспертный лист
оценочных материалов для проведения промежуточной аттестации по дисциплине «Дискретная математика»

Направление подготовки / специальность

27.03.05 Инноватика
(код и наименование)

Направленность (профиль)/специализация

Управление инновациями
(наименование)

Бакалавр
квалификация выпускника

1. Формальное оценивание		
Показатели	Присутствуют	Отсутствуют
Наличие обязательных структурных элементов:	+	
–титульный лист	+	
–пояснительная записка	+	
– типовые оценочные материалы	+	
–методические материалы, определяющие процедуру и критерии оценивания	+	

Содержательное оценивание			
Показатели	Соответствует	Соответствует частично	Не соответствует
Соответствие требованиям ФГОС ВО к результатам освоения программы	+		
Соответствие требованиям ОПОП ВО к результатам освоения программы	+		
Ориентация на требования к трудовым функциям ПС (при наличии утвержденного ПС)	+		
Соответствует формируемым компетенциям, индикаторам достижения компетенций	+		

Заключение: ФОС рекомендуется/ не рекомендуется к внедрению; обеспечивает/ не обеспечивает объективность и достоверность результатов при проведении оценивания результатов обучения; критерии и показатели оценивания компетенций, шкалы оценивания обеспечивают/ не обеспечивают проведение всесторонней оценки результатов обучения.

Эксперт, должность, ученая степень, ученое звание ____________________ /

(подпись)