

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Попов Анатолий Николаевич
Должность: директор
Дата подписания: 18.09.2026 13:52:43
Уникальный программный ключ:
1e0c38dcc0aee73cee1e5c09c1d5873fc7497bc8

Приложение 9.4.31
ОПОП-ППССЗ по специальности
23.02.01 Организация перевозок и
управление на транспорте (по видам)

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ОП.10 МАТЕМАТИКА

для специальности

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

*Базовая подготовка
среднего профессионального образования
(год начала подготовки по УП: 2025)*

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
2. РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ,
ПОДЛЕЖАЩИЕ ПРОВЕРКЕ
3. ОЦЕНКА ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
 - 3.1. ФОРМЫ И МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ
 - 3.2. КОДИФИКАТОР ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1 ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Фонд оценочных средств учебной дисциплины ОП.10 Математика может быть использован при различных образовательных технологиях, в том числе и как дистанционные контрольные средства при электронном / дистанционном обучении.

В результате освоения учебной дисциплины ОП.10 Математика обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам) следующими знаниями, умениями, которые формируют общие и профессиональные компетенции, а также личностными результатами, осваиваемыми в рамках программы воспитания:

уметь:

У1. Применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач.

У2. Применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности.

У3. Использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.

З1. Основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств.

З2. Решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен сформировать следующие компетенции:

-общие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Оформлять документы, регламентирующие организацию перевозочного процесса на транспорте.

ПК 2.2. Организовывать движение транспорта, обеспечивать безопасность движения на транспорте и решать профессиональные задачи посредством применения нормативно-правовых документов.

ПК 2.3. Определять и анализировать выполнение показателей эксплуатационной работы.

ПК 3.1. Планировать и организовывать работу по транспортно-логистическому обслуживанию в сфере грузовых перевозок.

ПК 3.2. Планировать и организовывать работу по транспортному обслуживанию в сфере пассажирских перевозок.

ЛР.2 Проявляющий активную гражданскую позицию, демонстрирующий приверженность принципам честности, порядочности, открытости, экономически активный и участвующий в студенческом и территориальном самоуправлении, в том числе на условиях добровольчества, продуктивно взаимодействующий и участвующий в деятельности общественных организаций.

ЛР.4 Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР.23 Получение обучающимися возможности самораскрытия и самореализация личности.

ЛР.30 Осуществляющий поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения различных задач, профессионального и личностного развития.

Формой промежуточной аттестации по учебной дисциплине является письменный экзамен.

2 РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ, ПОДЛЕЖАЩИЕ ПРОВЕРКЕ

2.1. В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих, профессиональных компетенций и личностных результатов в рамках программы воспитания:

Результаты обучения: умения, знания, компетенции и личностные результаты	Показатели оценки результата	Форма контроля и оценивания
Уметь:		
У1. Применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач. ОК 01, ОК 02 ПК1.2, ПК2.1, ПК3.1, ЛР2,4,23,30	- Вычисление производной сложных функций - Применение производной при решении геометрических и физических задач - Вычисление определенных интегралов - Применение определенного интеграла к решению геометрических задач - Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными - Применение методов приближенного вычисления определенного интеграла, для решения профессиональных задач;	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.
У2. Применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности. ОК 01, ОК 02 ПК3.1, ПК3.2 ЛР2,4,23,30	- Вычисление элементов комбинаторики; -Вычисление классической и статистической вероятности; -Вычисление вероятностей случайных событий; - Вычисление вероятности сложных событий; - Вычисление вероятности по формулам Байеса и полной вероятности; - Вычисление вероятности при повторении испытаний по формуле Бернулли; -Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины; - Решение заданий прикладного характера на применение теории вероятностей.	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.
У3. Использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях. ОК 01, ОК 02 ПК2.3, ПК2.2 ЛР2,4,23,30	- Формулировка геометрического и механического смысла производной; - Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой; - Описание процессов в естествознании и технике с помощью дифференциальных уравнений. - Исследование рядов на сходимость; - Применение на практике признака Даламбера -Решение транспортных задач методом	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.

	наименьшей стоимости Решение транспортных задач диагональным методом или методом северо-западного угла.	
Знать:		
31. Основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств. ОК 01, ОК 02 ПК1.2 ЛР2,4,23,30	- Знать основные понятия множества и теории графов - Знать формулы приближенного дифференцирования - Знать формулировку метода Эйлера	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.
32. Решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел. ОК 01, ОК 02 ЛР2,4,23,30	Выполнение действий над комплексными числами. Решение прикладных электротехнических задач методом комплексных чисел	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.

3 ОЦЕНКА ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по предмету ОП.10 Математика, направленные на формирование общих и профессиональных компетенций, а также личностных результатов в рамках программы воспитания.

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Таблица 2

Элемент учебной дисциплины	Формы и методы контроля					
	Текущий контроль		Рубежный контроль		Промежуточная аттестация	
	Форма контроля	Проверяемые У, З, ОК, ПК	Форма контроля	Проверяемые У, З, ОК, ПК	Форма контроля	Проверяемые У, З, ОК, ПК
Раздел 1. Математический анализ					<i>экзамен</i>	<i>У1, У3, З1, ОК 01, ПК2.3, ЛР2,4,23,30</i>
Тема 1.1 Производная функции.	<i>Устный опрос Самостоятельная работа №1</i>	<i>У1, У3, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 1.2 Практическое занятие №1 «Вычисление производной. Приложение производной для вычисления механических и физических величин».	<i>Устный опрос Практическое занятие №1 Самостоятельная работа №2</i>	<i>У1, У3, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 1.3 Неопределенный интеграл.	<i>Устный опрос Самостоятельная работа №3</i>	<i>У1, У3, З1 ЛР2,4,23,30</i>				

Тема 1.4 Практическое занятие №2 «Вычисление площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла».	<i>Устный опрос Практическое занятие №2 Самостоятельная работа №4</i>	<i>У1, У3, ОК 01, ПК2.3, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 1.5 Обыкновенные дифференциальные уравнения.	<i>Устный опрос Самостоятельная работа №5</i>	<i>У1, У3, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 1.6 Практическое занятие №3 «Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными».	<i>Устный опрос Практическое занятие №3 Самостоятельная работа №6</i>	<i>У1, У3, З1, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 1.7 Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов.	<i>Устный опрос Самостоятельная работа №7</i>	<i>У1, У3, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 1.8 Практическое занятие №4	<i>Устный опрос; Практическое занятие №4 Самостоятельная работа</i>	<i>У1, У3, ЛР2,4,23,30</i>				

«Разложение функций в ряд Фурье. Расчет электрических цепей несинусоидальных периодических токов с применением рядов Фурье».	№8					
Раздел 2. Основы дискретной математики					экзамен	3 1,32 ОК 02, ПК 1.2, ЛР2,4,23,30
Тема 2.1 Основы теории множеств. Основы теории графов.	Устный опрос Самостоятельная работа №10	3 1,32, ЛР2,4,23,30				
Тема 2.2 Практическое занятие №5 «Построение графа по условию ситуационных задач».	Устный опрос Практическое занятие №5 Самостоятельная работа №11	3 1,32, ОК 02, ПК 1.2, ЛР2,4,23,30				
Раздел 3. Основы теории вероятности и математической статистики					экзамен	У2, ПК3.2, ЛР2,4,23,30
Тема 3.1 . Вероятность. Случайная величина, ее функция распределения.	Устный опрос Самостоятельная работа №12	У2, ЛР2,4,23,30				

Тема 3.2. Практическое занятие №6 «Применение комбинаторики и вероятности события при решении профессиональных задач».	<i>Устный опрос Практическое занятие №6 Самостоятельная работа №13</i>	<i>У2, ПК3.1, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 3.3 Практическое занятие №7 «Построение рядов распределения случайной величины по заданному условию».	<i>Устный опрос Практическое занятие №7 Самостоятельная работа №15</i>	<i>У2, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 3.4 Практическое занятие №8 «Нахождение вероятности и числовых характеристик случайной величины при решении профессиональных задач».	<i>Устный опрос Практическое занятие №8 Самостоятельная работа №16</i>	<i>У2, ОК 1 -ОК 9, ПК1.3, ПК2.1, ПК3.1., 31, Л2,4,23,30</i>				
Раздел 4. Основные					<i>экзамен</i>	<i>У1, У3,31, ЛР2,4,23,30</i>

численные методы						
Тема 4.1. Применение численного дифференцирования при решении профессиональных задач.	<i>Устный опрос</i> <i>Самостоятельная работа</i> <i>№17</i>	<i>У1, У3, 31</i> <i>ОК 1 - ОК</i> <i>9, ПК 1.3,</i> <i>Л2, 4, 23, 30</i>				
Тема 4.2 Практическое занятие №9 «Вычисление интегралов методами прямоугольников, трапеций и парабол. Оценка погрешности».	<i>Устный опрос</i> <i>Практическое занятие №9</i> <i>Самостоятельная работа</i> <i>№18</i>	<i>У1, У3,</i> <i>ОК 1 - ОК</i> <i>9, ПК 1.3,</i> <i>Л2, 4, 23, 30</i>				
Тема 4.3 Построение интегральной кривой. Метод Эйлера.	<i>Устный опрос</i> <i>Самостоятельная работа</i> <i>№19</i>	<i>У1, У3, 31</i> <i>ОК 1 - ОК</i> <i>9, ПК 1.3,</i> <i>Л2, 4, 23, 30</i>				
Тема 4.4 Практическое занятие №10 «Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений».	<i>Устный опрос</i> <i>Практическое занятие</i> <i>№10</i> <i>Самостоятельная работа</i> <i>№20</i>	<i>У1, У3,</i> <i>ОК 1 - ОК</i> <i>9, ПК 1.3,</i> <i>Л2, 4, 23, 30</i>				
Раздел 5. Линейное					<i>экзамен</i>	<i>У3, 31,</i> <i>ПК2.2,</i>

программирование						<i>ЛР2,4,23,30</i>
Тема 5.1. Решение транспортных задач.	<i>Устный опрос</i>	<i>У3, 31, ЛР2,4,23,30</i>				
Тема 5.2 Обобщение и систематизация знаний.	<i>Устный опрос</i>	<i>У3, 31, ПК2.2, ЛР2,4,23,30</i>				

3.2 Кодификатор оценочных средств

Функциональный признак оценочного средства (тип контрольного задания)	Код оценочного средства
Устный опрос	<i>УО</i>
Практическая работа № n	<i>ПР № n</i>
Тестирование	<i>Т</i>
Контрольная работа № n	<i>КР № n</i>
Задания для самостоятельной работы - реферат; - доклад; - сообщение; - ЭССЕ	<i>СР</i>
Разноуровневые задачи и задания (расчётные, графические)	<i>РЗЗ</i>
Рабочая тетрадь	<i>РТ</i>
Проект	<i>П</i>
Деловая игра	<i>ДИ</i>
Кейс-задача	<i>КЗ</i>
Зачёт	<i>З</i>
Дифференцированный зачёт	<i>ДЗ</i>
Экзамен	<i>Э</i>

4 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Темы эссе (рефератов, докладов, сообщений)

1. Женщины – математики.
2. От абака до компьютера.
3. Блез Паскаль.
4. Численные методы.
5. История становления численных методов.
6. Вклад российских ученых в теорию вероятностей.
7. Применение определенного интеграла к решению различных практических задач (задачи с решениями).
8. Применение производной к решению различных практических задач (задачи с решениями).
Открытие парадоксов теории множеств.
9. История возникновения комплексных чисел.

4.1.2 Подготовка справочного материала

1. Производная функции.
2. Графы.
3. Формулы неопределенного и определенного интеграла.
4. Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.
5. Пределы. Ряды.
6. Комбинаторика.
7. Теория вероятностей.
8. Математическое ожидание и дисперсия.
9. Вычисление интегралов методами прямоугольников, трапеций и парабол.
10. Метод Эйлера.

Контроль выполнения данного вида самостоятельной работы осуществляется во время учебного занятия в виде проверки преподавателем письменного эссе (реферата, доклада, сообщения) или устного выступления обучающегося.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если тема раскрыта всесторонне; материал подобран актуальный, изложен логично и последовательно; материал достаточно иллюстрирован достоверными примерами; презентация выстроена в соответствии с текстом выступления, аргументация и система доказательств корректны.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если тема раскрыта всесторонне; имеются неточности в терминологии и изложении, не искажающие содержание темы; материал подобран актуальный, но изложен с нарушением последовательности; недостаточно достоверных примеров.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если тема сообщения соответствует содержанию, но раскрыта не полностью; имеются серьезные ошибки в терминологии и изложении, частично искажающие смысл содержания учебного материала; материал изложен непоследовательно и нелогично; недостаточно достоверных примеров.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если тема не соответствует содержанию, не раскрыта; подобран недостоверный материал; грубые ошибки в терминологии и изложении, полностью искажающие смысл содержания учебного материала; информация изложена нелогично; выводы неверные или отсутствуют.

4.2 Вопросы для устного опроса

1. Как найти модуль комплексного числа?
2. Как найти аргумент комплексного числа?
3. Какие комплексные числа называются сопряженными?
4. Какие существуют формы комплексных чисел?
5. Дать определение графа.
6. Какие детали при изображении графа не важны?
7. Что называется маршрутом?
8. Что называется цепью?
9. Что называется циклом?
10. Что такое степень вершины графа?
11. Что называется цепью?
12. Какое число называют комплексным?
13. Что представляет собой число i ?
14. Что называется маршрутом?
15. Какие существуют формы комплексных чисел?
16. Что называется циклом?
17. Какая функция называется сложной? Приведите примеры.
18. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
19. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
20. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
21. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
22. Приведите примеры использования производной при определении скорости различных процессов.
23. В чем заключается признак возрастания и убывания функции?
24. В чем заключается необходимый признак существования экстремума?
25. В чем заключается достаточный признак существования экстремума?
26. Как отыскивают экстремумы функции с помощью второй производной?
27. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции?
28. В чем различие между нахождением наибольшего и наименьшего значений функции?
29. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
30. Как записать всю совокупность первообразных функций?
31. Что называется неопределенным интегралом?
32. Почему интеграл называется неопределенным?
33. Что означает постоянная C в определении неопределенного интеграла?
34. Что такое определенный интеграл?
35. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
36. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
37. Может ли площадь криволинейной трапеции быть отрицательной?
38. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равной нулю и почему?
39. Приведите примеры физических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.
40. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
41. Уравнение какого вида называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?

42. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения действительные и различные?
43. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения действительные и равные?
44. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения мнимые?
45. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения комплексные?
46. Найти общее решение уравнений $y'' - 7y' + 10y = 0$.
47. Определение дифференциального уравнения первого порядка?
48. Назвать алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися
49. переменными.
50. Определение дифференциального уравнением второго порядка?
51. Определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
52. Назвать алгоритм решения дифференциального уравнения второго порядка?
53. Дайте определение ДУЧП.
54. Что такое порядок ДУЧП?
55. Какова классификация ДУЧП?
56. Геометрическая интерпретация ДУЧП.
57. Что такое характеристики ДУЧП?
58. Что называется числовым рядом?
59. Что называется частичными суммами ряда?
60. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
61. Сформулируйте признак Даламбера.
62. Сформулируйте основные свойства рядов.
63. Сформулируйте признак Коши.
64. Перечислите основные задачи комбинаторики.
65. Что называется n - факториалом?
66. Что называется перестановками?
67. Что называется перемещениями?
68. Что называется сочетаниями?
69. Вычислите число перестановок из 5 предметов.
70. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
71. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
72. В корзине 5 белых, 3 черных и 7 полосатых шаров. Чему равна вероятность достать наугад одноцветный шар?
73. Что называется условной вероятностью?
74. Как формулируется теорема умножения вероятностей?
75. Какая величина называется дискретной?
76. Что называется законом распределения случайной величиной?
77. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величиной?
78. Что называется дисперсией случайной величины?
79. Какой закон распределения называется биномиальным?
80. Методы приближенного вычисления интеграла
81. Запишите формулу прямоугольников
82. Как вычислить определенный интеграл по формуле прямоугольников?
83. В чем состоит смысл вычисления определенного интеграла по формуле трапеций?

84. Как вычислить определенный интеграл по формуле Симпсона?
85. Что понимается под законом больших чисел?
86. Что такое приближенное дифференцирование?
87. Что такое шаг интерполяции?
88. Как найти шаг интерполяции?
89. Как найти первую конечную разность?
90. Как вычислить q ?
91. Что называют задачей Коши?
92. Какой применяют метод для решения задачи Коши?
93. В чем состоит суть метода Эйлера?
94. Что такое шаг разбиения?
95. Как вычислить абсолютную погрешность?
96. Дайте определение производной.
97. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
98. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
99. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?

4.3 Тестовые задания

Раздел 1. Математический анализ

1. Чему равен интеграл $\int_1^3 2x dx$

- а. 5
- б. 8
- в. -8

2. Вычислите производную функции $y = 5x - 7$

- а. 5
- б. 2
- в. -2

3. Уравнение, которое помимо функции содержит её производные:

- а. дифференциальное уравнение
- б. иррациональное уравнение
- в. тригонометрическое уравнение

4. При решении дифференциальных уравнений ищется:

- а. вектор
- б. число (несколько чисел)
- в. функция

5. Укажите правильный ответ $\int_0^2 dx$:

- а. 0
- б. 2
- в. 4

6. Выберите методы приближенного вычисления определенного интеграла. (возможно несколько вариантов ответа)

- а. метод прямоугольников
- б. метод трапеций
- в. метод ромбов

7. Установите соответствие

1. $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$	а. гармонический ряд
2. $1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{18}\right)^{n-1}$	б. ряд геометрической прогрессии
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$	в. обобщенно-гармонический ряд

8. Продолжите последовательность 1, 1, 2, 3, 5:

- а. 8
- б. 7
- в. 3

9. Угловая частота первой гармоники ряда Фурье вычисляется по формуле:

а. $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$; б. $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$; в. $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

10. Продолжите последовательность 5, 7, 12, 19, 31, 50:

- а. 81
- б. 61
- в. 91

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Ключ к тесту

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	б	а	а	в	б	а,б	1в,2б,3а	а	в	а

Критерии оценки:

«5» – от 86% до 100% правильных ответов.

«4» – от 76% до 85% правильных ответов.

«3» – от 61% до 75% правильных ответов.

«2» – менее 61% правильных ответов.

Раздел 2. Основы дискретной математики

1. Даны два множества $A = \{2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Найдите пересечение данных множеств.

а) (3, 5)

б) (8, 9)

с) (6, 9)

2. Что называется степенью вершины x графа G ?

а) число, показывающее направление графа.

б) результат многократного умножения.

с) количество рёбер графа G , принадлежащих вершине x .

3. Даны два множества $A = \{1, 3, 4\}$ и $B = \{2, 3, 5\}$. Найдите объединение данных множеств.

а) (1, 4, 5)

б) (1,2,3,4,5)

с) (4, 6, 8)

4. Что называется пересечением множеств?

а) это множество, которому принадлежат те и только те элементы, которые одновременно принадлежат всем данным множествам.

б) это множество, которое содержит все элементы исходных множеств.

с) это множество, в котором не существует ни одного элемента.

5. Дайте понятие графа как математического объекта.

а) совокупность двух множеств — множества вершин, и множества их парных связей, называемого множеством рёбер.

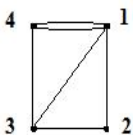
б) объект графической модели квадратичной функции.

с) геометрический образ функции.

6. Установите соответствие

1. Вершина, имеющая нулевую степень, является	а) висячей
2. Вершина, имеющая степень равную 1, является	б) изолированной

7. Определите степень вершины 3, для графа изображенного на рисунке. Запишите ответ _____



8. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется:

а) нулевым

б) конечным

с) пустым

9. При обозначении множеств используют:

а) только круглые скобки

б) только фигурные скобки

с) иногда круглые, иногда фигурные, иногда одновременно оба вида скобок

10. Множества обозначаются:

- а) малыми латинскими буквами
- б) большими латинскими буквами
- с) кириллицей

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Ключ к тесту

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	а	с	б	а	а	1б,2а	3	с	б	б

Критерии оценки:

«5» – от 86% до 100% правильных ответов.

«4» – от 76% до 85% правильных ответов.

«3» – от 61% до 75% правильных ответов.

«2» – менее 61% правильных ответов

Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики

1. Сколькими способами можно составить список из 5 учеников?

- а) 120
- б) 15
- с) 25
- д) 5

2. Сколькими способами можно встать в очередь в библиотеку четырём обучающимся?

- а) 14
- б) 15
- с) 24
- д) 5

3. Вычислите $4!$ (где $!$ - это факториал)?

- а) 24
- б) 10
- с) 25
- д) 4

4. Чему равна вероятность достоверного события?

- а) 0
- б) 1
- с) 12

5. Установите соответствие между основными понятиями комбинаторики:

1. перестановки.	а. С
2. размещения.	б. Р
3. сочетания.	с. А

6. Установите соответствие:

1. факториал	а. i
2. первообразная.	б. !
3. мнимая единица.	с. F(x)

7. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	3	4
---	---	---

p	0,4	0,6
----------	------------	------------

Ответ: $M(x)=$ _____

8. Раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними:

- a. теория случайных цифр
- b. теория величин
- c. теория вероятностей

9. Дискретная случайной величины X , заданна законом распределения, найдите p_2 :

X	2	5	8
p	0.2	p_2	0.6

Ответ: _____

10. Чему равна вероятность невозможного события?

- a) 0
- b) 6
- c) -9

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Ключ к тесту

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	a	c	a	b	1b,2a,3c	1b,2c,3a	3,6	c	3	a

Критерии оценки:

«5» – от 86% до 100% правильных ответов.

«4» – от 76% до 85% правильных ответов.

«3» – от 61% до 75% правильных ответов.

«2» – менее 61% правильных ответов

Раздел 4. Основные численные методы

1. Формула парабол – это формула

- a) Симпсона
- b) Ньютона
- c) Лейбница

2. Сколько существует методов приближенного вычисления определенных интегралов?

- a) 8
- b) 6
- c) 3
- d) 5

3. Δy_0 - это...

- a) вторая конечная разность
- b) седьмая конечная разность
- c) пятая конечная разность
- d) первая конечная разность

4. Как обозначается шаг интерполяции

- a) f
- b) Y
- c) h

5. Установите соответствие между основными понятиями:

1.формула парабол	a. $\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$
2.формула трапеций	b. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}))$
3.формула прямоугольников	c. $\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$

6. Относительная погрешность вычисляется по формуле:

a) $\delta = \frac{|A_{\text{прибл}} - A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}} 100\%$

c) $\delta = \frac{|A_{\text{прибл}} + A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}} 100\%$

d) $\delta = -\frac{|A_{\text{прибл}} + A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}}$

7. Найдите область определения функции $y(x) = 6x^2 + 6x + 6$

Ответ: $D(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

8. С помощью какого метода можно решить задачу Коши?

- a. метод Эйлера
- b. метод Симпсона
- c. метод Ньютона

9. По таблице значений функции

x	0	1	2
y	3	6	8

составлена таблица конечных разностей:

X	Y	Δy
0	3	
1	6	
2	8	

Найдите Δy_0 .

Ответ: $\underline{\hspace{2cm}}$

10. Найдите множество значений функции $y(x) = 6x^2 + 6x + 6$

Ответ: $E(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Ключ к тесту

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	a	c	d	c	2c,3a,1b	a	R	a	3	[4,5; + ∞)

Критерии оценки:

- «5» – от 86% до 100% правильных ответов.
- «4» – от 76% до 85% правильных ответов.
- «3» – от 61% до 75% правильных ответов.

«2» – менее 61% правильных ответов.

Раздел 5. Линейное программирование

1. Какой критерий оптимальности целесообразно использовать при решении задач линейного программирования?
 - a. Количественный
 - b. Качественный
 - c. На основе экспертных оценок
 - d. На основе пожеланий клиентов
2. Что является критерием оптимальности при решении задачи закрепления грузоотправителей за грузополучателями однородного груза?
 - a. Минимальный суммарный порожний пробег
 - b. Минимальный суммарный нулевой пробег
 - c. Максимальное использование всех имеющихся технических средств
 - d. Минимальная суммарная транспортная работа
3. Что является критерием оптимальности при решении задачи разработки рациональных маршрутов?
 - a. Минимальный суммарный порожний пробег
 - b. Минимальный суммарный нулевой пробег
 - c. Минимальная суммарная транспортная работа
 - d. Минимальная протяженность маршрута
4. Что является критерием оптимальности при решении задачи распределения погрузочно-разгрузочных механизмов по маршрутам?
 - a. Минимальный суммарный порожний пробег
 - b. Минимальный суммарный нулевой пробег
 - c. Максимальное использование всех имеющихся технических средств
 - d. Минимальная протяженность маршрута
5. Какой метод применяется для решения задачи планирования перевозок грузов мелкими партиями по развозочным (сборочным) маршрутам?
 - a. Метод потенциалов
 - b. Симплексный метод (симплекс)
 - c. Метод комбинаторного анализа
 - d. Диагностический метод
6. Какой метод применяется для решения задачи разработки рациональных маршрутов?
 - a. Метод потенциалов
 - b. Симплексный метод (симплекс)
 - c. Метод комбинаторного анализа
 - d. Диагностический метод
7. Какой метод применяется для решения задачи распределения погрузочно-разгрузочных механизмов по маршрутам?
 - a. Метод потенциалов
 - b. Симплексный метод (симплекс)
 - c. Метод комбинаторного анализа
 - d. Диагностический метод
8. Что является критерием оптимальности при решении задачи закрепления клиентуры за АТП?
 - a. Минимальный суммарный порожний пробег
 - b. Минимальный суммарный нулевой пробег
 - c. Максимальное использование всех имеющихся технических средств
 - d. Минимальная протяженность маршрута
9. Потенциалы пунктов отправления (U) и пунктов назначения (V) определяют для
 - a. заполненных клеток таблицы

б.для всех клеток таблицы

Наименование	Всего	Количество форм ТЗ	Контроли
--------------	-------	--------------------	----------

с.для свободных клеток таблицы

10. Какими методами находят оптимальный план ТЗ

а.СЗУ, мин - элемента

б.Шимбел, Оттерман

с.Потенциал, дифференциальных рент, распределительным

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	a	d	a	c	c	a	b	b	a	c

Ключ к тесту

Критерии оценки:

«5» – от 86% до 100% правильных ответов.

«4» – от 76% до 85% правильных ответов.

«3» – от 61% до 75% правильных ответов.

«2» – менее 61% правильных ответов.

Таблица 3 - Форма информационной карты банка тестовых заданий

разделов	ТЗ	Открытого о типа	Закрытого типа	На соответствие	Упорядочение	руемые компетен ции
Раздел 1.Математический анализ	10	-	9	1	-	ОК 01, ОК 02
Раздел 2. Основы дискретной математики	10	1	8	1	-	ОК 01, ОК 02
Раздел 3. Основы теории вероятности и математической статистики	10	3	5	2	-	ОК 01, ОК 02
Раздел 4. Основные численные методы	10	3	6	1	-	ОК 01, ОК 02
Раздел 5. Линейное программирование	10	-	10	-	-	ОК 01, ОК 02

4.4 Практические работы

Практическое занятие № 1

Вычисление производной. Приложение производной для вычисления механических и физических величин.

Цель: приобрести навыки вычисления производных сложных функций, научиться определять максимум мощности в цепи постоянного тока с применением производной.

Задание:

1. Найдите производную функции.

1. $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^3$

2. $y = \sqrt{x^3 + 5}$

3. $y = \log_3 (x^2 + 5x - 6)$

4. $y = 2^{\sin 3x}$

5. $y = \arccos 9x$

2. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 3x - 1$, если касательная образует с осью Ox угол 45° .

3. Материальная точка движется по закону $S = t^3 - 4t^2 + 2$ (м). Найдите скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 10$ (с).

4. Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $S = 2t^2 + 3t - 1$. Найдите кинетическую энергию тела через 3 секунды после начала движения.

5. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени $t=0$, задается формулой $Q = 3t^2 - 3t + 4$. Найти силу тока в конце 6-й секунды.

Контрольные вопросы для защиты:

1. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
2. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
3. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
4. Дайте определение производной.
5. В чем заключается механический смысл производной?

Ответы и комментарии:

Пример. Найти производную функции $y = \ln tg^3 3x$.

Решение. Порядок следования промежуточных функций: $y = \ln u$, $u = v^3$, $v = tg z$, $z = 3x$. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (\ln tg^3 3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot (tg^3 3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 3tg^2 3x \cdot (tg 3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 3tg^2 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' \\ &= \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 3tg^2 3x \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{9}{\cos^2 3x} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{9}{\cos^2 3x}$.

Пример. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 3$, если касательная образует с осью Ox угол 45° .

Решение.

Касательная образует с осью Ox угол $45 \Rightarrow k = \operatorname{tg} 45 = 1 \Rightarrow y' = 2x - 4 = 1 \Rightarrow x_0 = 2,5$ - абсцисса точки касания $\Rightarrow y_0 = -0,75 \Rightarrow y - (-0,75) = 1(x - 2,5) \Rightarrow y = x - 3,25$ - уравнение касательной.

Ответ: $y = x - 3,25$.

Пример. Материальная точка движется по закону $S(t) = 6t^3 - t^2$ (м). Найдите скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 10$ (с).

Решение.

$v(t) = S'(t) = (6t^3 - t^2)' = 18t^2 - 2t$, $t \in (0; \infty)$ - закон, по которому изменяется скорость материальной точки.

Скорость в момент времени $t_0 = 10$: $v(10) = 18 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 = 1600$ (м/с).

$a(t) = v'(t) = (18t^2 - 2t)' = 36t - 2$, $t \in (0; \infty)$ - закон, по которому изменяется ускорение материальной точки.

Ускорение в момент времени $t_0 = 10$: $a(10) = 36 \cdot 10 - 2 = 328$ (м/с²).

Ответ: 1600 м/с; 328 м/с².

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №2

Вычисление площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла.

Цель: приобрести навык вычисления площадей.

Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

1.1.	$y = 1 - x^2, y = x^2 + 2, x = -1, x = 1$
------	---

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертёж:

2.1.	$xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$.
------	---------------------------------

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертёж.

3.1.	$y = x^2 + 1, x = 0, y = 1, y = 3$.
------	--------------------------------------

Контрольные вопросы для защиты:

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Что в записи $\int_a^b f(x) dx$ означают: а) числа a и b ; б) x ; в) $f(x)$; г) $f(x) dx$? Может ли быть $a=b$; $a>b$.
3. Зависит ли приращение $F(b)-F(a)$ от выбора первообразной?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

Ответы и комментарии:

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$ и прямой $y = x + 2$.

Решение.

Площадь фигуры, ограниченная сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу – непрерывной кривой $y = \varphi(x)$, слева – прямой $x = a$ и справа прямой $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx.$$

В тех случаях, когда заданные кривые образуют замкнутую область, и прямые $x = a$ и $x = b$ не заданы, то числа a и b совпадают с абсциссами точек пересечения кривых. Найдём точки пересечения заданных линий. Для этого решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x + 2 = 2x - \frac{x^2}{2} + 6.$$

$$x + 2 = 2x - \frac{x^2}{2} + 6 \quad | \cdot 2,$$

$$2x + 4 = 4x - x^2 + 12,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Получим $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$; следовательно, $a = -2$ и $b = 4$.

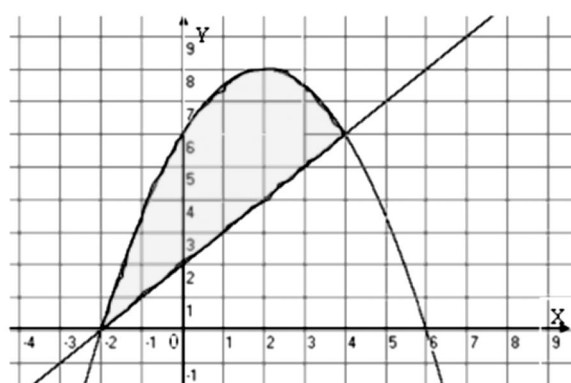
Парабола и прямая пересекаются в точках $A(-2;0)$ и $B(4;6)$. Для построения прямой достаточно двух найденных точек, но для параболы этих данных недостаточно. Поэтому найдём дополнительные точки:

а) вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ расположена в точке с координатами $\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$; в данной задаче парабола $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + 6$ ($a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$) имеет вершину в точке $(2; y(2))$, т.е. $(2;8)$.

б) Так как $a = -\frac{1}{2} < 0$, следовательно, ветви параболы направлены вниз, и она пересекает ось абсцисс. Найдём точки пересечения с осью Ox :

$$y = 0, \Rightarrow -\frac{x^2}{2} + 2x + 6 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 = 16,$$



$$x_1 = \frac{-2+4}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{-1} = -2,$$

$$x_2 = \frac{-2-4}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

Рис. 1

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках с координатами $(-2;0)$ и $(6;0)$ (рис.1).

Применяя $S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$, получим:

$$S = \int_{-2}^4 \left(\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6 \right) - (x+2) \right) dx = \int_{-2}^4 \left(-\frac{x^2}{2} + x + 4 \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^4 =$$

$$= 8 - \frac{64}{6} + 16 - 2 - \frac{8}{6} + 8 = 30 - 12 = 18.$$

Ответ: 18 кв. ед.

Пример. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{3} + 1$, прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ..

Решение.

а) Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox , криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Подставляя в формулу $a = 0$, $b = 3$ и $y = \frac{x^2}{3} + 1$ (рис. 2), получим:

$$V_x = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{x^4}{9} + \frac{2x^2}{3} + 1 \right) dx = \pi \left(\frac{x^5}{45} + \frac{2x^3}{9} + x \right) \Big|_0^3 = \pi \left(\frac{27}{5} + 6 + 3 \right) = 14,4\pi.$$

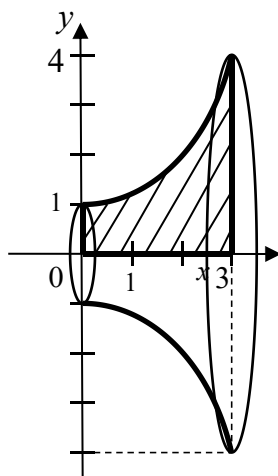


Рис. 2

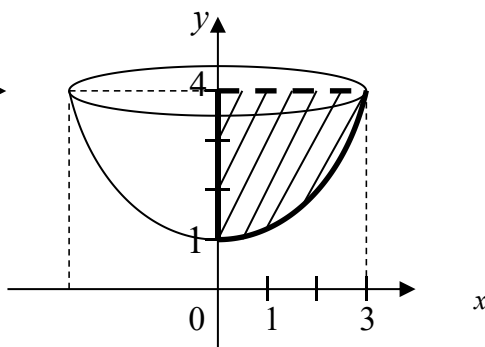


Рис. 3

б) Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy , криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью Oy и прямыми $y = a$ и $y = b$, вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

Из уравнения параболы $y = \frac{x^2}{3} + 1$ выразим x^2 :

$$\frac{x^2}{3} = y - 1 \Rightarrow x^2 = 3y - 3.$$

По рисунку 3 определяем: $a = 1, b = 4$.

Тогда:

$$V_y = \pi \int_1^4 (3y - 3) dy = \pi \left(\frac{3y^2}{2} - 3y \right) \Big|_1^4 = \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot 4^2}{2} - 3 \cdot 4 \right) - \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot 1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) = 13,5\pi.$$

Ответ: а) $V_x = 14,4$ куб. ед.; б) $V_y = 13,5$ куб. ед.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №3

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Цель: приобрести навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Задание:

1. Найдите общее решение однородных дифференциальных уравнений.

1.1.	а) $y'' - 10y' + 21y = 0$;
	б) $y'' + 14y' + 49y = 0$;
	в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Контрольные вопросы для защиты:

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Приведите примеры.
2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое – частным?

4. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?
5. Как проверить правильность найденного решения дифференциального уравнения

Ответы и комментарии:

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка:
 а) $y'' + 2y' - 3y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение.

а) $y'' + 2y' - 3y = 0$

Характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 3 = 0$ имеет корни $k_1 = -3$ и $k_2 = 1$.
 Следовательно, $y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$.

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$

Характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 9 = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = k = -3$.
 Следовательно, $y_0 = e^{kx} (C_1 + C_2 \cdot x) = e^{-3x} (C_1 + C_2 \cdot x)$;

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет корни $k_1 = \alpha + \beta i = 2 + 3i$ и $k_2 = \alpha - \beta i = 2 - 3i$. Следовательно,

$$y_0 = e^{\alpha x} (C_1 \cdot \sin \beta x + C_2 \cdot \cos \beta x) = e^{2x} (C_1 \cdot \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x).$$

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №4

Сумма ряда. Признак Даламбера.

Цель: научиться применять числовые ряды при решении прикладных задач.

Задание:

1. Показать, что ряд сходится и найти его сумму.

1.1.	$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots$
-------------	--

2. Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера.

2.1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{50}}{3^n}$
-------------	--

Контрольные вопросы для защиты:

1. Какие ряды называются сходящимися?
2. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Сформулируйте признак Даламбера.

Ответы и комментарии:

Пример. Докажите, что ряд сходится и найдите его сумму:

$$- . 1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^3} + \dots$$

$$= . \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n+5} \right)$$

Решение:

$$- . 1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{18^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{18} \right)^{n-1} .$$

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ - ряд геометрической прогрессии.

$$\left\{ \begin{array}{l} |q| \geq 1 - \text{ряд расходится} \\ |q| < 1 - \text{ряд сходится, } S = \frac{a}{1-q} . \end{array} \right.$$

Для данного ряда $a = 1$, $q = \frac{1}{18} < 1$, следовательно, ряд сходится и сумма ряда равна

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{18}} = \frac{1}{\frac{18-1}{18}} = \frac{1}{\frac{17}{18}} = \frac{18}{17} = 1 \frac{1}{17} .$$

$= . \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n+5} \right)$ Числовой ряд называется сходящимся, если существует

конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, где

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

$$a_1 = [n=1] = \frac{1}{5} - \frac{1}{13} , \quad a_2 = [n=2] = \frac{1}{13} - \frac{1}{21} ; \quad a_3 = [n=3] = \frac{1}{21} - \frac{1}{29} ;$$

$$a_4 = [n=4] = \frac{1}{29} - \frac{1}{37} ; \dots, \quad a_n = \frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n+5} .$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n+5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8n+5}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8n+5} \right) = \frac{1}{5} .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n+5} \right) = \frac{1}{5} .$$

Ответ: а) $1 \frac{1}{17}, 6) \frac{1}{5}$.

Пример. Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{8^n}$.

Решение:

Применим признак сходимости Даламбера. Сначала запишем формулы для n -го и $(n+1)$ -го членов ряда: $a_n = \frac{n^3}{8^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{8^{n+1}}$.

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^3}{8^{n+1}} : \frac{n^3}{8^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^3}{8^n \cdot 8} \cdot \frac{8^n}{n^3} \right) = \frac{1}{8} < 1$$
, следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Ответ: ряд сходится.

Пример. Исследовать ряды на сходимость по признаку Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}.$$

Решение.

$$a_n = \frac{n!}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}.$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{5^{n+1}} : \frac{n!}{5^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!(n+1)}{5^n \cdot 5} \cdot \frac{5^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{5} \right) = \infty > 1$$
, следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №5

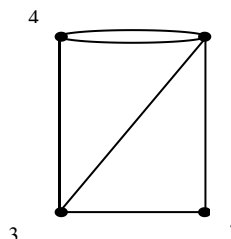
Построение графа по условию ситуационных задач.

Цель: знать основные понятия теории графов.

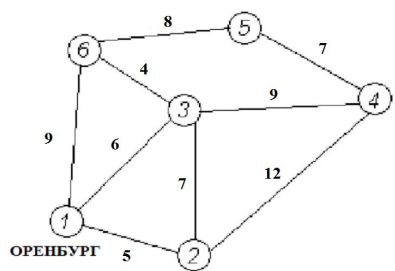
Задание:

II вариант

1. Определить степени вершин графа, изображенного на рисунке.



2. Дана сеть железных дорог, соединяющих населенные пункты. Найти кратчайшие пути от города Оренбурга (1) до каждого населенного пункта (если двигаться можно только по дорогам).

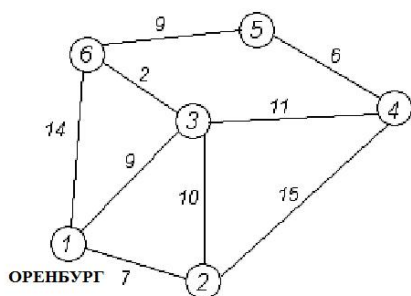


Контрольные вопросы для защиты:

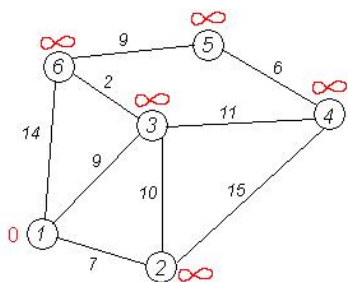
1. Дать определение графа.
2. Какие детали при изображении графа не важны?
3. Что называется маршрутом, цепью, циклом?

Ответы и комментарии:

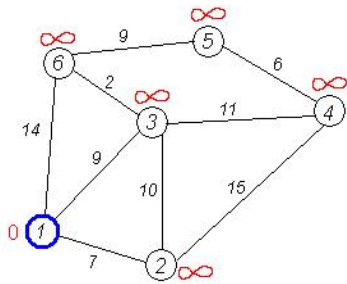
Дана сеть автомобильных дорог, соединяющих населенные пункты Оренбургской области. Найти кратчайшие пути от города Оренбурга (1) до каждого населенного пункта (если двигаться можно только по дорогам).



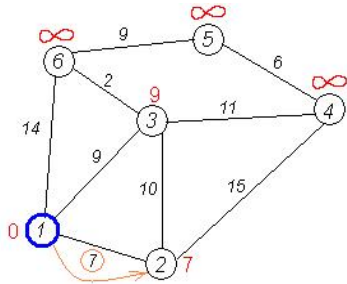
Решение: Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (ребра графа). В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначена их «цена» — длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.



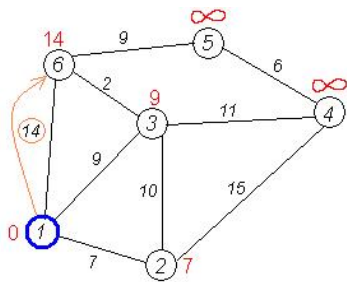
Первый шаг. Рассмотрим шаг алгоритма Дейкстры для нашего примера. Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6.



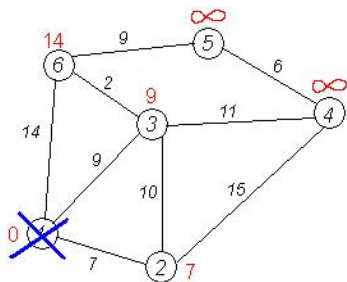
Первый по очереди сосед вершины 1 – вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме кратчайшего расстояния до вершины 1, значению её метки, и длины ребра, идущего из 1-й в 2-ю, то есть $0 + 7 = 7$. Это меньше текущей метки вершины 2, бесконечности, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.



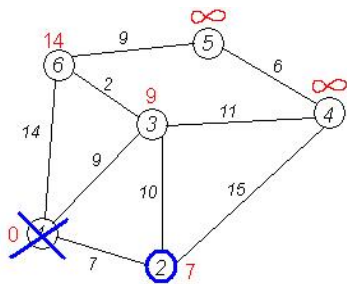
Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины – 3-й и 6-й.



Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит (то, что это действительно так, впервые доказал [Э. Дейкстра](#)). Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.



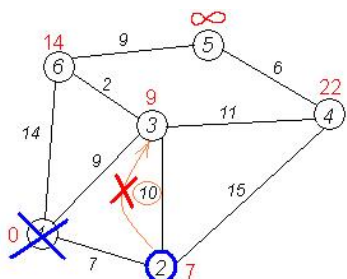
Второй шаг. Шаг алгоритма повторяется. Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



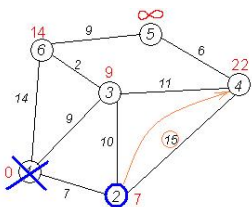
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаемся пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4.

Первый (по порядку) сосед вершины 2 – вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.

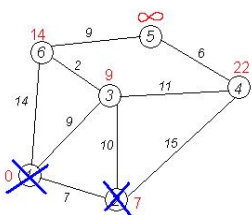
Следующий сосед вершины 2 – вершина 3, так как имеет минимальную метку из вершин, отмеченных как не посещённые. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 ($7 + 10 = 17$). Но текущая метка третьей вершины равна $9 < 17$, поэтому метка не меняется.



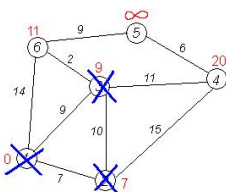
Ещё один сосед вершины 2 – вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до 2-й вершины и расстояния между вершинами 2 и 4, то есть 22 ($7 + 15 = 22$). Поскольку $22 < \infty$, устанавливаем метку вершины 4 равной 22.



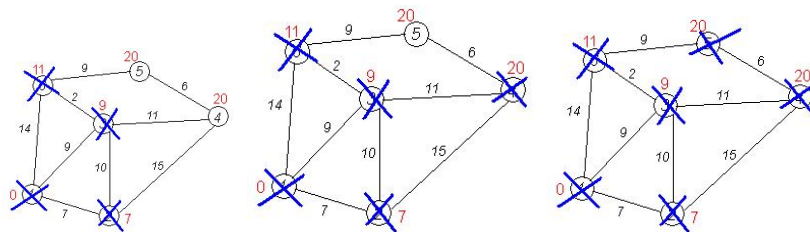
Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем её как посещённую.



Третий шаг. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После её «обработки» получим такие результаты:



Дальнейшие шаги. Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин. Это будут вершины 6, 4 и 5, соответственно порядку.



Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда нельзя больше обработать ни одной вершины. В данном примере все вершины зачеркнуты, однако ошибочно полагать, что так будет в любом примере - некоторые вершины могут остаться незачеркнутыми, если до них нельзя добраться. Результат работы алгоритма виден на последнем рисунке: $d(1;2)=7$, $d(1;3)=9$, $d(1;4)=20$, $d(1;5)=20$, $d(1;6)=11$.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №6

Применение комбинаторики и вероятности события при решении профессиональных задач.

Цель: приобрести навык решения прикладных задач на нахождение вероятности события, на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

Задание:

1. Трое пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

2. Вероятность того, что человек находящийся на перроне станции, ожидает электричку, равна 0,5. Найти вероятность, того, что среди отобранных 8 человек ровно 6 ожидают электричку.

3. Три вагоностроительных завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50%, второй – 20%, а третий – 30% всей продукции. Первый завод выпускает 1% брака, второй завод – 2% и третий – 3%. Наудачу отобранный вагон оказался с браком. Найти вероятность того, что вагон произведен вторым заводом.

4. В урне содержится 8 белых и 6 красных шаров. Случайным образом вынимают 4 шаров. Какова вероятность того, что среди них имеется: а) ровно 3 белых шаров; б) меньше, чем 3 белых шаров; в) хотя бы один белый шар.

5. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: 25 с первого завода, 35 со второго завода, 40 с третьего завода. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,9, на втором 0,8, на третьем 0,7.

Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным? Какова вероятность того, что качественное изделие будет с первого завода?

Контрольные вопросы для защиты:

1. Что называется n -факториалом?
2. Перечислите основные задачи комбинаторики.
3. Что называется перестановками?
4. Запишите формулы для вычисления перестановок.
5. Что называется размещениями?
6. Запишите формулу для вычисления размещений.
7. Что называется сочетаниями?
8. Запишите формулу для вычисления сочетаний.
9. Какие события называются несовместными, противоположными, независимыми, зависимыми?
10. Что называется условной вероятностью?
11. Сформулируйте теоремы сложения и умножения вероятностей.
12. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.
13. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.
14. Что называется вероятностью события?
15. Что называется относительной частотой события?
16. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.
17. Чему равна сумма несовместных событий?
18. Какие события называются противоположными?
19. Сформулируйте теорему сложения вероятностей.

Ответы и комментарии:

Пример. В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и наудачу извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение.

Всевозможными элементарными исходами являются события:

$A = \{\text{извлечение белого шара}\},$

$B = \{\text{извлечение красного шара}\},$

$C = \{\text{извлечение зеленого шара}\}.$

$D = \{\text{извлечение голубого шара}\}.$

Необходимо найти событие, состоящего в появлении события B , или C , или D . т.е. события $B + C + D$. Так как события B, C, D - несовместны, то

$$P(B + C + D) = P(B) + P(C) + P(D) = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{16}{20} = 0,8.$$

Таким образом, вероятность извлечения цветного шара равна 0,8.

Пример. Три вагоностроительных завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50%, второй - 20%, а третий - 30% всей продукции. Первый завод выпускает 1% брака, второй завод - 2% и третий - 3%. Наудачу отобранный вагон оказался с браком. Найти вероятность того, что вагон произведен вторым заводом.

Решение.

Обозначим:

$A = \{\text{отобранный вагон оказался с браком}\},$

$B_1 = \{\text{вагон произведен на первом заводе}\},$

$B_2 = \{\text{вагон произведен на втором заводе}\},$

$B_3 = \{\text{вагон произведен на третьем заводе}\}.$

$$P(B_1) = 0,5, \quad P(B_2) = 0,2, \quad P(B_3) = 0,3.$$

$A/B_1 = \{\text{вагон, изготовленный на первом заводе, оказался с браком}\},$
 $A/B_2 = \{\text{вагон, изготовленный на втором заводе, оказался с браком}\},$
 $A/B_3 = \{\text{вагон, изготовленный на третьем заводе, оказался с браком}\}.$
 $P(A/B_1) = 0,01, \quad P(A/B_2) = 0,02, \quad P(A/B_3) = 0,03.$

Тогда

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) = \\
 &= 0,5 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 = 0,005 + 0,004 + 0,009 = 0,018.
 \end{aligned}$$

Следовательно, вероятность события, состоящего в том, что отобранный вагон с браком равна 0,018.

Вероятность того, что деталь, проработавшая положенное время, взята из второй партии, определим по формуле Байеса.

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,02}{0,018} = \frac{0,004}{0,018} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Таким образом, вероятность того, что вагон с браком изготовлен на втором заводе, равна $\frac{2}{9}$.

Пример. Вероятность того, что человек находящейся на перроне станции, ожидает электричку, равна 0,5. Найти вероятность того, что среди отобранных 8 человек, ровно 6 ожидают электричку.

Решение.

Обозначим событие $A = \{\text{из 8 отобранных человек 6 ожидают электричку}\}$, $n = 8$, $m = 6$. По условию $p = 0,5$, тогда $q = 1 - 0,5 = 0,5$. По формуле Бернулли имеем:

$$P_8(6) = C_8^6 \cdot p^6 \cdot q^{8-6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} \cdot 0,5^6 \cdot 0,5^2 = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot 0,5^8 = \frac{56}{2^9} = \frac{7}{2^6} = \frac{7}{64} = 0,1094.$$

Итак, вероятность того, что из 8 отобранных человек на перроне ровно 6 ожидают электричку, равна 0,1094.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №7

Построение рядов распределения случайной величины по заданному условию.

Цель: приобрести навык решения прикладных задач на построение рядов распределения случайной величины.

Задание:

На станции находится n человек. Вероятность того, что человек, находящейся на перроне станции, ожидает электричку равна p . Составить закон распределения случайной величины X — количества людей, ожидающих электричку на перроне

	p	n
1.1.	0,6	5

Контрольные вопросы для защиты:

1. Какая величина называется случайной?
2. Какая случайная величина называется дискретной?
3. Опишите схему Бернулли. Какие элементарные события повторяются в этих опытах?
4. Запишите формулу Бернулли.
5. Что называется законом распределения случайной величины?
6. Какой закон распределения называется биномиальным?

Ответы и комментарии:

Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X — числа выпадения герба.

Решение.

Возможны следующие значения случайной величины X : 0, 1, 2, 3, 4, 5. Зная, что вероятность выпадения герба в одном испытании равна $1/2$, найдем вероятности значений случайной величины X по формуле Бернулли:

$$\begin{aligned}
 P(A_{5,0}) &= C_5^0 p^0 q^5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \\
 P(A_{5,1}) &= C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32} \\
 P(A_{5,2}) &= C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} \\
 P(A_{5,3}) &= C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} \\
 P(A_{5,4}) &= C_5^4 p^4 q^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32} \\
 P(A_{5,5}) &= C_5^5 p^5 q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}
 \end{aligned}$$

Закон распределения имеет вид:

Значения x_i	0	1	2	3	4	5
Вероятности p_i	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Проверка: $1/32 + 5/32 + 10/32 + 10/32 + 5/32 + 1/32 = 1$.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» — баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №8

Нахождение вероятности и числовых характеристик случайной величины при решении профессиональных задач.

Цель: приобрести навык нахождения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины законом распределения.

Задание:

1. Задан закон распределения дискретной случайной величины X . Найти: а) вероятность p_5 ; б) математическое ожидание $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

x_i	-10	-7	1	2	5
p_i	0,25	0,2	0,15	0,1	p_5

2. На вокзале 4 склада. Вероятность того, что требуемый товар имеется на этих складах одинакова и равна 0,75. Составить закон распределения числа складов, на которых искомый товар имеется. Найти математическое ожидание, дисперсию дискретной случайной величины. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Контрольные вопросы для защиты:

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
2. Что называется дисперсией случайной величины?
3. Запишите формулу для вычисления среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины.

Ответы и комментарии:

Дискретная случайная величина задана таблицей:

x_1	2	4	5	10	12
p_1	0,1	0,15	0,3	0,2	p_5

Найти p_5 , математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить функцию распределения.

Решение:

Для любой дискретной случайной величины $\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 1$

Получаем: $0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,2 + p_5 = 1$. Отсюда $p_5 = 1 - 0,75 = 0,25$. То есть ряд распределения имеет вид:

x_1	2	4	5	10	12
p_1	0,1	0,15	0,3	0,2	0,25

Математическое ожидание найдем по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

Получаем $M(X) = 2*0,1 + 4*0,15 + 5*0,3 + 10*0,2 + 12*0,25 = 7,3$.

Дисперсию найдем по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$.

Получаем $M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,15 + 25 \cdot 0,3 + 100 \cdot 0,2 + 144 \cdot 0,25 = 0,4 + 2,4 + 7,5 + 20 + 36 = 66,3$

Тогда $D(X) = 66,3 - (7,3)^2 = 13,01$.

Среднее квадратичное отклонение найдем по формуле $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Получаем $\sigma(0x) = \sqrt{13,01} = 3,61$.

Построим многоугольник распределения: Если $10 < x \leq 12$, то $F(x) = 0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,2$

Функция распределения задается формулой $F(x) = P(X < x)$.

Будем задавать различные значения x и находить соответствующие значения функции.

Если $x \leq 2$, то $F(x) = 0$

Если $2 < x \leq 4$, то $F(x) = 0,1$

Если $4 < x \leq 5$, то $F(x) = 0,1 + 0,15 = 0,25$

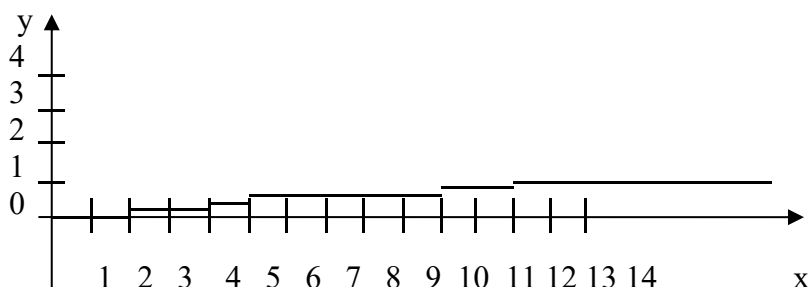
Если $5 < x \leq 10$, то $F(x) = 0,1 + 0,15 + 0,3 = 0,55$

Если $10 < x \leq 12$, то $F(x) = 0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,2 = 0,75$

Если $12 < x$, то $F(x) = 0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,2 + 0,25 = 1$.

$$\text{Получаем: } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 2 \\ 0,1, & \text{если } 2 < x \leq 4 \\ 0,25, & \text{если } 4 < x \leq 5 \\ 0,55, & \text{если } 5 < x \leq 10 \\ 0,75, & \text{если } 10 < x \leq 12 \\ 1, & \text{если } 12 < x \end{cases}$$

Построим график функции распределения:



Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие № 9

Вычисление интегралов методами прямоугольников, трапеций и парабол. Оценка погрешности.

Цель: приобрести навык при приближенном вычислении определенных интегралов приближенными методами: парабол, прямоугольников, трапеций.

Задание:

Вычислить 3 способами (методами прямоугольников, трапеций и парабол) определенный интеграл, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Вычислить погрешность приближения.

1	$\int_2^3 \frac{dx}{x^2 + 4}$
---	-------------------------------

Контрольные вопросы для защиты:

1. От чего зависит выбор метода приближенного интегрирования?
2. Какой из методов приближенного интегрирования является самым простым?
3. В чем суть метода трапеций?

Ответы и комментарии:

Пример.

Используя метод прямоугольников, вычислить $\int_0^{\pi/4} \cos x dx$

Решение:

Разделим промежуток интегрирования на 5 частей. Тогда $n=5$; $b-a=\pi/4$; $\Delta x=(b-a)/n=\pi/20 \approx 0.1571$. Соответствующие значения подынтегральной функции найдем с помощью таблиц:

$$y_0 = \cos 0 = 1; y_1 = \cos(\pi/20) = \cos 9 = 0.9877; y_2 = \cos(\pi/10) = \cos 18 = 0.9511; y_3 = \cos(3\pi/20) = \cos 27 = 0.8910; y_4 = \cos(\pi/5) = \cos 36 = 0.8090; y_5 = \cos(\pi/4) = \cos 45 = 0.7071$$

По формуле прямоугольников имеем

$$A_{\text{прибл}} = \int_0^{\pi/4} \cos x dx \approx 0.1571(1 + 0.9877 + 0.9511 + 0.8910 + 0.8090) = 0.7288$$

С другой стороны по формуле Ньютона-Лейбница

$$A_{\text{точн}} = \int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin(\pi/4) - \sin 0 = 0.5\sqrt{2}$$

Найдем относительную погрешность вычисления

$$\delta = \frac{|A_{\text{прибл}} - A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}} 100\% = \frac{|0.7288 - 0.5\sqrt{2}|}{0.5\sqrt{2}} 100\% \approx 3.06\%$$

Пример.

Найти приближенно $\int_0^4 x^2 dx$ методом трапеций, разделив промежуток интегрирования на

10 равных частей. Вычислить погрешность приближения.

Решение:

Здесь $n=10$; тогда $\Delta x = (b-a)/n = 0.4$. Точками деления являются:
 $x_0 = 0$; $x_1 = 0.4$; $x_2 = 0.8$; $x_3 = 1.2$; $x_4 = 1.6$; $x_5 = 2$; $x_6 = 2.4$; $x_7 = 2.8$; $x_8 = 3.2$; $x_9 = 3.6$; $x_{10} = 4$.

Найдем значения функции в точках деления:

$y_0 = 0$; $y_1 = 0.16$; $y_2 = 0.64$; $y_3 = 1.44$; $y_4 = 2.56$; $y_5 = 4$; $y_6 = 5.76$; $y_7 = 7.84$; $y_8 = 10.24$;
 $y_9 = 12.96$; $y_{10} = 16$;

Используя формулу, получим:

$$\int_0^4 x^2 dx \approx 0.4 \left(\frac{0+16}{2} + 0.16 + 0.64 + 1.44 + 2.56 + 4.0 + 5.76 + 7.84 + 10.24 + 12.96 \right) = 21.44$$

Точное значение интеграла определяем по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^4 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{64}{3} = 21.33$$

Найдем относительную погрешность приближенного вычисления:

$$\delta = \frac{21.44 - 21.33}{21.33} \cdot 100\% \approx 0.5\%$$

Пример.

Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_1^4 x^2 dx$.

Решение:

Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей. Тогда $(b-a)/3n = 3/30 = 1/10 = 0.1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y = x^2$ значения аргумента $x_0 = 1$, $x_1 = 1.3$; $x_3 = 1.6$;... $x_{10} = 4$, найдем соответствующие значения ординат:
 $y_0 = 1$, $y_1 = 1.69$; $y_2 = 2.56$; $y_3 = 3.61$; $y_4 = 4.84$; $y_5 = 6.25$; $y_6 = 7.84$; $y_7 = 9.61$; $y_8 = 11.56$;
 $y_9 = 13.69$; $y_{10} = 16$. Применяя формулу Симпсона, получим:

$$\int_1^4 x^2 dx = 0.1((1+16) + 2(2.56 + 4.84 + 7.84 + 11.56) + 4(1.69 + 3.61 + 6.25 + 9.61 + 13.69)) = 21$$

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №10

Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель: приобрести навык решения прикладных задач с использованием метода Эйлера.

Задание:

1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ методом Эйлера, если $x \in [a; b]$, $h = 0,1$. Решение оформить в виде таблицы, также в виде графика.

1.1.	$y' = y - x$	$y(0) = 1$	$[0;1]$
------	--------------	------------	---------

Контрольные вопросы для защиты:

1. В чем состоит суть приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка по методу Эйлера?
2. В каких случаях применяется способ Эйлера.

Ответы и комментарии:

Пример.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = y^2 - x$, $y(1) = 0$ на отрезке $[1, 3]$ методом Эйлера с шагом $h = 0,2$ и с шагом $h = 0,1$. Изобразить решение графически. Оценить погрешность.

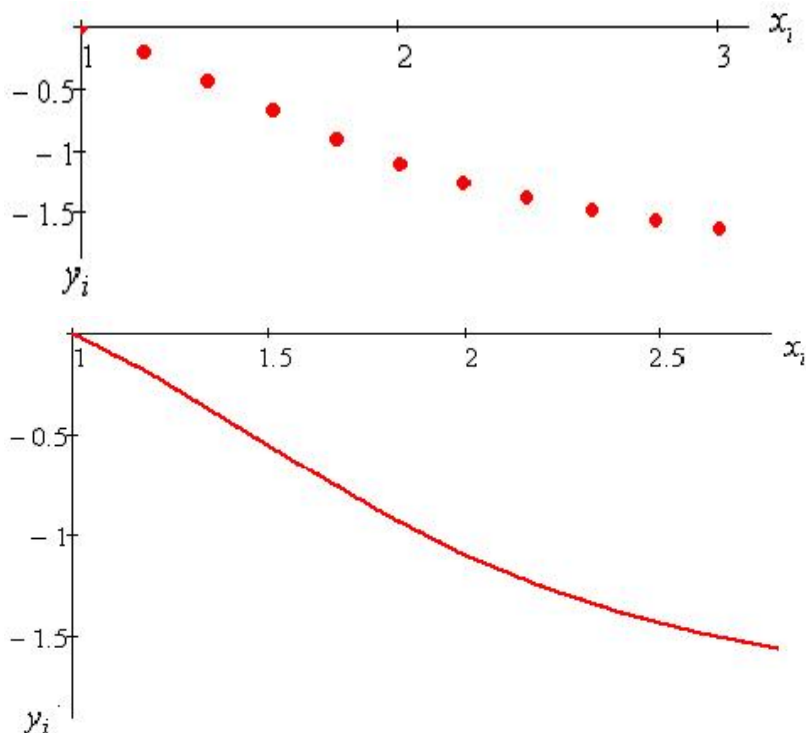
Решение.

Вычисления с шагом $h = 0.2$:

$$x_0 = 1, y_0 = 0, i = 0, 2, \dots, 9, x_{i+1} = 1 + 0.2(i+1), y_{i+1} = y_i + 0.2 \cdot (y_i^2 - x_i)$$

Ниже приведены: таблица значений приближённого решения в узлах равномерной сетки с шагом $h = 0.2$, график приближённого решения и ломаная Эйлера.

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y_i	0	-0.2	-0.432	-0.675	-0.904	-1.1	-1.258	-1.382	-1.48	-1.562	-1.634



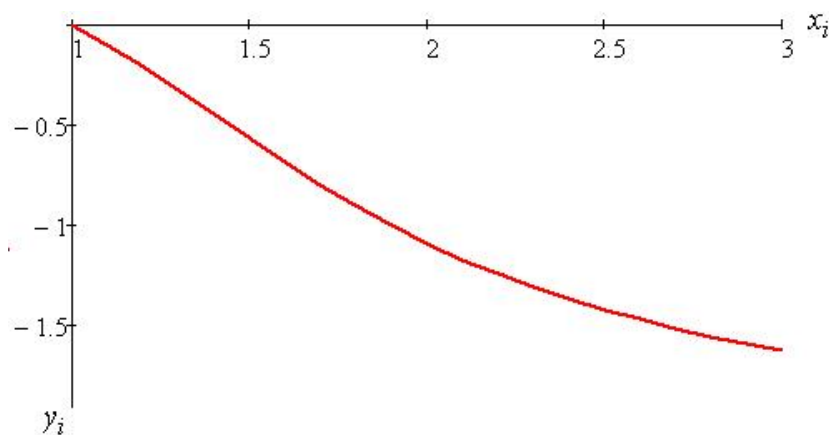
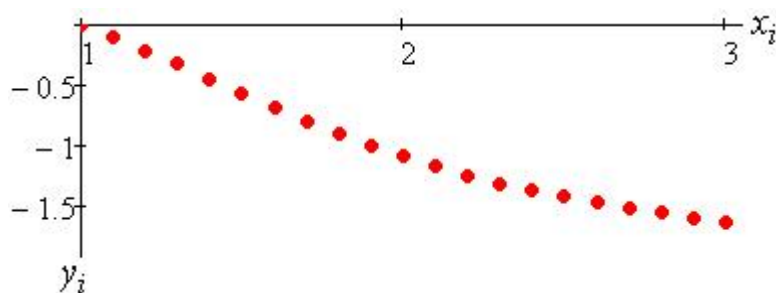
Вычисления с шагом половинным $h = 0.1$:

$$x_0 = 1, y_0 = 1, i = 0, 2, \dots, 19, x_{i+1} = 1 + 0.1(i + 1), y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot (y_i^2 - x_i)$$

Ниже приведены: таблица значений приближённого решения в узлах равномерной сетки с половинным шагом $h = 0.1$, график приближённого решения и ломаная Эйлера.

x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	0	-0.1	-0.209	-0.325	-0.444	-0.564	-0.683	-0.796	-0.903	-1.001	-1.091

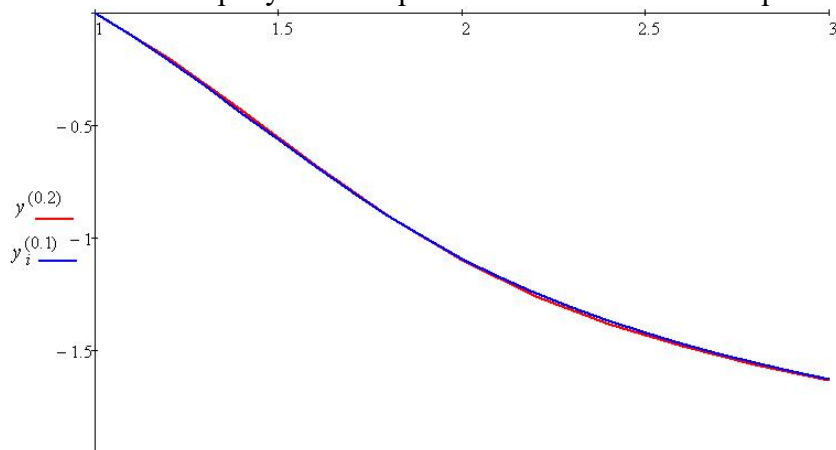
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
	-1.172	-1.245	-1.31	-1.368	-1.421	-1.469	-1.513	-1.554	-1.593	-1.629



Погрешность вычислений можно положить равной

$$\max_i |y_i^{(0.2)} - y_{2i}^{(0.1)}| = 0.014.$$

Ниже на рисунке изображены обе ломаные Эйлера.



Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, обучающийся аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Перечень вопросов (задач) для промежуточной аттестации (экзамен/зачет)

1. Какое число называют комплексным?
2. Как найти модуль комплексного числа?
3. Как найти аргумент комплексного числа?
4. Какие комплексные числа называются сопряженными?
5. Какие существуют формы комплексных чисел?
6. Дать определение графа.
7. Какие детали при изображении графа не важны?
8. Что называется маршрутом?
9. Что называется цепью?
10. Что называется циклом?
11. Что такое степень вершины графа?
12. Что называется цепью?
13. Какое число называют комплексным?
14. Что представляет собой число i ?
15. Что называется маршрутом?
16. Какие существуют формы комплексных чисел?
17. Что называется циклом?
18. Какая функция называется сложной? Приведите примеры.
19. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
20. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
21. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
22. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
23. Приведите примеры использования производной при определении скорости различных процессов.
24. В чем заключается признак возрастания и убывания функции?
25. В чем заключается необходимый признак существования экстремума?
26. В чем заключается достаточный признак существования экстремума?
27. Как отыскивают экстремумы функции с помощью второй производной?
28. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции?
29. В чем различие между нахождением наибольшего и наименьшего значений функции?

30. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
31. Как записать всю совокупность первообразных функций?
32. Что называется неопределенным интегралом?
33. Почему интеграл называется неопределенным?
34. Что означает постоянная C в определении неопределенного интеграла?
35. Что такое определенный интеграл?
36. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
37. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
38. Может ли площадь криволинейной трапеции быть отрицательной?
39. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равной нулю и почему?
40. Приведите примеры физических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.
41. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
42. Уравнение какого вида называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?
43. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения действительные и различные?
44. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения действительные и равные?
45. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения мнимые?
46. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения комплексные?
47. Найти общее решение уравнений $y'' - 7y' + 10y = 0$.
48. Определение дифференциального уравнения первого порядка?
49. Назвать алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися
50. переменными.
51. Определение дифференциального уравнением второго порядка?
52. Определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
53. Назвать алгоритм решения дифференциального уравнения второго порядка?
54. Дайте определение ДУЧП.
55. Что такое порядок ДУЧП?
56. Какова классификация ДУЧП?
57. Геометрическая интерпретация ДУЧП.
58. Что такое характеристики ДУЧП?
59. Что называется числовым рядом?
60. Что называется частичными суммами ряда?
61. Перечислите основные задачи комбинаторики.
62. Что называется n -факториалом?
63. Что называется перестановками?
64. Что называется перемещениями?
65. Что называется сочетаниями?
66. Вычислите число перестановок из 5 предметов.
67. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
68. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
69. В корзине 5 белых, 3 черных и 7 полосатых шаров. Чему равна вероятность достать наугад одноцветный шар?
70. Что называется условной вероятностью?

71. Как формулируется теорема умножения вероятностей?
72. Какая величина называется дискретной?
73. Что называется законом распределения случайной величиной?
74. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величиной?
75. Что называется дисперсией случайной величины?
76. Какой закон распределения называется биномиальным?
77. Методы приближенного вычисления интеграла
78. Запишите формулу прямоугольников
79. Как вычислить определенный интеграл по формуле прямоугольников?
80. В чем состоит смысл вычисления определенного интеграла по формуле трапеций?
81. Как вычислить определенный интеграл по формуле Симпсона?
82. Что понимается под законом больших чисел?
83. Что такое приближенное дифференцирование?
84. Что такое шаг интерполяции?
85. Как найти шаг интерполяции?
86. Как найти первую конечную разность?
87. Как вычислить q ?
88. Что называют задачей Коши?
89. Какой применяют метод для решения задачи Коши?
90. В чем состоит суть метода Эйлера?
91. Что такое шаг разбиения?
92. Как вычислить абсолютную погрешность?
93. Дайте определение производной.
94. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
95. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
96. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
97. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
98. В чем заключается механический смысл производной?

Задания для оценки освоения предмета за 3 семестр

КУ-54

ОТЖТ- структурное подразделение ОрИПС – филиала ПривГУПС

Рассмотрено на заседании предметной (цикловой) комиссии «___» _____ 2025 г. Председатель ПЦК _____ Л.Б.Овечкина	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1 ОП.10 Математика Группа _____ Семестр III	УТВЕРЖДАЮ Заместитель директора по учебной работе СПО (ОТЖТ) П. А. Грачев «___» _____ 2025 г.
---	---	---

Оцениваемые компетенции:

ОК 01, ОК 02, ПК 1.2, ПК 2.2, ПК 2.3, ПК 3.1, ПК 3.2, ЛР 2,4,23,30

Инструкция для обучающихся

Экзаменационная работа включает 10 заданий по основным разделам математики: линейная алгебра, теория множеств и графов, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы.

Часть 1 содержит 6 заданий с кратким решением (1-6) по 1 баллу, Часть 2 состоит из заданий с развернутым решением (7-8) по 2 балла и (9-10) по 3 балла.

Критерии оценки

Отметка (оценка)	Количество правильных ответов в %	Количество правильных ответов в баллах
«5» (отлично)	86-100	15-16
«4» (хорошо)	76-85	13-14
«3» (удовлетворительно)	61-75	10-12
«2» (неудовлетворительно)	0-60	0-9

Время выполнения заданий – 180 минут

Часть 1. Представьте краткое решение

1. (1 балл) Найдите вторую производную $y''(x)$ функции $y = 7x^2 + 3x + 1$

2. (1 балл) Найдите множество всех первообразных функции $y = 3x$

3. (1 балл) Дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид:

$$1) \frac{dy}{dx} \cos x = \frac{y}{\ln x} \quad 2) y'' + 2y' + y = 0 \quad 3) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad 4) \frac{\partial z}{\partial x} = 16x^3$$

4. (1 балл) Найдите четвертый член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$

5. (1 балл) В урне 14 белых и 2 черных шара. Из урны берут один шар. Найдите вероятность того, что шар окажется белым.

6. (1 балл) Даны два множества: $A = \{2; 4; 5; 8; 11; 12\}$ и $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Найдите пересечение данных множеств.

Часть 2. Представьте развёрнутое решение

7. (2 балла) Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	2	5	8
p	0.1	0.2	0.7

8. (2 балла) Найдите определённый интеграл $\int_1^2 (4u + 1) du$

9. (3 балла) Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$.

10. (3 балла) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

Оборудование: справочный материал, калькулятор, ручка.

Эталоны ответов

№ заданий в тесте или билете	1	2	3	4
№ правильного ответа	$14x+3$	$F(x) = \frac{3x^2}{2} + C$	4	$\frac{1}{11}$

№ заданий в тесте или билете	5	6	7	8
№ правильного ответа	0.171	$\{2; 4\}$	6.8	1

№ заданий в тесте или билете	9	10
№ правильного ответа	2,3	$y = C_1 e^x + x C_2 e^x$

Критерии оценки

Отметка (оценка)	Количество правильных ответов в %	Количество правильных ответов в баллах
«5» (отлично)	86-100	15-16
«4» (хорошо)	76-85	13-14
«3» (удовлетворительно)	61-75	10-12
«2» (неудовлетворительно)	0-60	0-9