Приложение 9.4.32
ОПОП-ППССЗ по специальности
23.02.01 Организация перевозок и
управление на транспорте (по видам)

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
ОП.10 МАТЕМАТИКА
основной профессиональной образовательной программы -
программы подготовки специалистов среднего звена по специальности СПО
23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

Базовая подготовка
среднего профессионального образования
(год начала подготовки по УП: 2024)

Содержание

1 ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Фонд оценочных средств учебной дисциплины ОП.10 Математика может быть использован при различных образовательных технологиях, в том числе и как дистанционные контрольные средства при электронном / дистанционном обучении.

В результате освоения учебной дисциплины ОП.10 Математика обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам) следующими знаниями, умениями, которые формируют общие и профессиональные компетенции, а также личностными результатами, осваиваемыми в рамках программы воспитания:

уметь:

У1. Применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач.

У2. Применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности.

У3. Использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.

З1.Основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств.

З2.Решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.

-общие компетенции:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.

ОК 02. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.

-профессиональные компетенции:

ПК 1.3. Оформлять документы, регламентирующие организацию перевозочного процесса.

ПК 2.1. Организовывать работу персонала по планирования и организации перевозочного процесса.

ПК 3.1. Организовывать работу персонала по обработке перевозочных документов и осуществлению расчётов за услуги, предоставляемые транспортными организациями.

- личностные результаты:

ЛР.2 Проявляющий активную гражданскую позицию, демонстрирующий приверженность принципам честности, порядочности, открытости, экономически активный и участвующий в студенческом и территориальном самоуправлении, в том числе на условиях добровольчества, продуктивно взаимодействующий и участвующий в деятельности общественных организаций.

ЛР.4 Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа».

ЛР.23 Получение обучающимися возможности самораскрытия и самореализация личности.

ЛР.30 Осуществляющий поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения различных задач, профессионального и личностного развития.

Формой промежуточной аттестации по учебной дисциплине является письменный экзамен.

Формой промежуточной аттестации по учебной дисциплине является **экзамен.**

2 РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ, ПОДЛЕЖАЩИЕ ПРОВЕРКЕ

2.1 В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих, профессиональных компетенций и личностных результатов в рамках программы воспитания:

Результаты обучения: умения, знания, компетенции и личностные результаты	**Показатели оценки результата**	**Форма контроля и оценивания**
Уметь:		
У1 - применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач. ОК 01, ОК 02, ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30	- Вычисление производной сложных функций - Применение производной при решении геометрических и физических задач - Вычисление определенных интегралов - Применение определенного интеграла к решению геометрических задач - Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными -Применение методов приближенного вычисления определенного интеграла, для решения профессиональных задач;	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.
У2 - применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности. ОК 01, ОК 02, ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30	- Вычисление элементов комбинаторики; -Вычисление классической и статистической вероятности; -Вычисление вероятностей случайных событий; - Вычисление вероятности сложных событий; - Вычисление вероятности по формулам Байеса и полной вероятности; - Вычисление вероятности при повторении испытаний по формуле Бернулли; -Вычисление числовых характеристик дискретной случайной величины; - Решение заданий прикладного характера на применение теории вероятностей.	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.
У3 - использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях. ОК 01, ОК 02, ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30	- Формулировка геометрического и механического смысла производной; - Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения, пути, пройденного точкой; - Описание процессов в естествознании и технике с помощью дифференциальных уравнений. - Исследование рядов на сходимость; - Применение на практике признака Даламбера -Решение транспортных задач методом	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.

	наименьшей стоимости Решение транспортных задач диагональным методом или методом северо-западного угла.	
Знать:		
З1 - основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств. ОК 01, ОК 02, ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30	- Знать основные понятия множества и теории графов - Знать формулы приближенного дифференцирования - Знать формулировку метода Эйлера	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.
З2 - решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел. ОК 01, ОК 02, ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30	Выполнение действий над комплексными числами. Решение прикладных электротехнических задач методом комплексных чисел	Устный опрос. Результат выполнения практических работ. Результат выполнения самостоятельных работ.

3 ОЦЕНКА ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1 Формы и методы оценивания

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по дисциплине ОП.10 Прикладная математика, направленные на формирование общих и профессиональных компетенций, а также личностных результатов в рамках программы воспитания.

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Элемент учебной дисциплины	**Формы и методы контроля**					
	Текущий контроль		**Рубежный контроль**		**Промежуточная аттестация**	
	Форма контроля	**Проверяемые У, З, ОК, ПК, ЛР**	**Форма контроля**	**Проверяемые У, З, ОК, ПК, ЛР**	**Форма контроля**	**Проверяемые У, З, ОК, ПК, ЛР**
Введение. Понятие о математическом моделировании **Раздел 1.** **Математический анализ**					*Экзамен*	*У1, У3,З1,* *ОК 01, ОК 02,* *ПК 1.3,* *ПК 2.1,* *ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*
Введение. **Тема 1.1.** Производная функции	*Устный опрос* *Самостоятельная работа №1,2*	*У1,У3, ОК 01,* *ПК 2.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.2. **Практическое занятие №1** Вычисление производной сложных функций	*Устный опрос* *Практическое занятие № 1* *Самостоятельная работа №2*	*У1, У3,* *ОК 01, ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.3. Практическое занятие №2 Приложение производной для вычисления механических и физических величин	*Устный опрос* *Практическое занятие № 2* *Самостоятельная работа №2*	*У1, У3, З1* *ОК 02, ПК 1.3,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.4. Неопределенный интеграл	*Устный опрос;* *Самостоятельная работа№3*	*У1, У3,* *ОК 02, ПК 2.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.5. **Практическое занятие №3** Вычисление простейших определенных интегралов	*Устный опрос;* *Практическое занятие №3* *Самостоятельная работа№3*	*У1, У3,* *ОК 01, ПК 1.3,* *ЛР2,4,23,30*				

Тема 1.6. **Практическое занятие №4** Вычисление площадей и объемов при проектировании объектов транспорта	*Устный опрос;* *Практическое занятие №4* *Самостоятельная работа№3*	*У1, У3, З1,* *ОК 01, ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.7. Обыкновенные дифференциальные уравнения	*Устный опрос;* *Самостоятельная работа№4*	*У1, У3,* *ОК 02, ПК 2.1,* *ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.8. **Практическое занятие №5** Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	*Устный опрос;* *Практическое занятие №5* *Самостоятельная работа №5*	*У1, У3,* *ОК 01, ПК 1.3,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.9 Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов	*Устный опрос;* *Самостоятельная работа №6*	*У1, У3,* *ОК 01, ПК 2.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.10 Практическое занятие №6 Разложение функций в ряд Фурье	*Устный опрос;* *Практическое занятие №6* *Самостоятельная работа №6*	*У1, У3,* *ОК 01 , ПК 2.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.11 Практическое занятие №7 Расчет электрических цепей несинусоидальных периодических токов с применением рядов Фурье	*Устный опрос;* *Практическое занятие №7* *Самостоятельная работа №6*	*У1, У3,* *ОК 01, ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 1.12 **Практическое занятие №8** Сумма ряда. Признак Даламбера	*Устный опрос;* *Практическое занятие №8* *Самостоятельная работа №6*	*У1, У3, З1* *ОК 02, ПК 2.1,* *ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Раздел 2. **Основы дискретной математики**					*Экзамен*	*З 1,З2* *ОК 01, ОК 02,* *ПК 1.3,*

						ПК 2.1, *ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*
Тема 2.1. Основы теории множеств	*Устный опрос;* *Самостоятельная работа№7*	*З 1,З2* *ОК 02, ПК 2.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 2.2. Основы теории графов	*Устный опрос;* *Самостоятельная работа№7*	*З 1,З2* *ОК 02, ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 2.3 Практическое занятие №9 Построение графа по условию ситуационных задач	*Устный опрос* *Практическое занятие №9* *Самостоятельная работа№7*	*З 1,З2* *ОК 02, ПК 2.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Раздел 3. Основы теории вероятности и математической					*Экзамен*	*У2, ОК 01,* *ОК 02,* *ПК 1.3,* *ПК 2.1,* *ПК 3.1,* *ЛР2,4,23,30*
Тема 3.1 . Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей	*Устный опрос;* *Самостоятельная работа №8*	*У2,ОК 02,* *ПК 1.3,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 3.2. Практическое занятие №10 Применение комбинаторики и вероятности события при решении профессиональных задач	*Устный опрос* *Практическое занятие№10* *Самостоятельная работа №8*	*У2,ОК 02,* *ПК 2.1,* *З1, ЛР2,4,23,30*				
Тема 3.3.Случайная величина, ее функция распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	*Устный опрос* *Самостоятельная работа№8*	*У2,ОК 01,* *ПК 2.1,* *ЛР2,4,23,30*				
Тема 3.4. Практическое занятие №11	*Устный опрос* *Практическое занятие№11*	*У2,ОК 02,* *ПК 3.1,*				

По заданному условию построение рядов распределения случайной величины	*Самостоятельная работа№8*	*ЛР2,4,23,30*				
Тема 3.5. Практическое занятие №12 Нахождение вероятности и числовых характеристик случайной величины при решении профессиональных задач	*Устный опрос Практическое занятие№12 Самостоятельная работа№8*	*У2,ОК 02, ПК 1.3, З1, ЛР2,4,23,30*				
Раздел 4. Основные численные методы					*экзамен*	*У1, У3, З1 ОК 01, ОК 02, ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30*
Тема 4.1. Применение численного дифференцирования при решении профессиональных задач	*Устный опрос; Самостоятельная работа№9*	*У1, У3, З1 ОК 02, ПК 2.1, ЛР2,4,23,30*				
Тема 4.2. Практическое занятие №13 Вычисление интегралов методами прямоугольников, трапеций и парабол. Оценка погрешности	*Устный опрос Практическое занятие№13 Самостоятельная работа№9*	*У1, У3, ОК 02, ПК 2.1, ЛР2,4,23,30*				
Тема 4.3.Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона	*Устный опрос; Самостоятельная работа№9*	*У1, У3, З1 ОК 02,ПК 1.3, ЛР2,4,23,30*				
Тема 4.4. Практическое	*Устный опрос*	*У1, У3,*				

занятие №14 Решение задач на нахождение по таблично заданной функции, функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции	*Практическое занятие№14 Самостоятельная работа№9*	*ОК 02,ПК 3.1, ЛР2,4,23,30*				
Тема 4.5. Построение интегральной кривой. Метод Эйлера	*Устный опрос; Самостоятельная работа№9*	*У1, У3, ОК 01, ПК 2.1, ЛР2,4,23,30*				
Тема 4.6. Практическое занятие №15 Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений	*Устный опрос; Практическое занятие№15 Самостоятельная работа№9*	*У1, У3, З1 ОК 01, ПК 1.3, ЛР2,4,23,30*				
Раздел 5. Линейное программирование					*Экзамен*	*У3, З1, ОК 01, ОК 02,ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30*
Тема 5.1. Решение транспортных задач методом наименьшей стоимости	*Устный опрос; результат выполнения самостоятельных работ№10*	*У3,ОК 02, ПК 3.1, З1, ЛР2,4,23,30*				
Тема5.2. Решение транспортных задач	*Устный опрос; результат выполнения самостоятельных работ№10*	*У3,ОК 02, ПК 3.1, З1, ЛР2,4,23,30*				
Тема 5.3. Обобщение и систематизация знаний	*Устный опрос; результат выполнения самостоятельных работ№10*	*У3,ОК 01, ПК 1.3, ЛР2,4,23,30*				

3.2 Кодификатор оценочных средств

Функциональный признак оценочного средства (тип контрольного задания)	**Код оценочного средства**
Устный опрос	*УО*
Практическая работа № n	*ПР № n*
Тестирование	*Т*
Контрольная работа № n	*КР № n*
Задания для самостоятельной работы - реферат; - доклад; - сообщение; - ЭССЕ - подготовка справочного материала	*СР*
Разноуровневые задачи и задания (расчётные, графические)	*РЗЗ*
Рабочая тетрадь	*РТ*
Проект	*П*
Деловая игра	*ДИ*
Кейс-задача	*КЗ*
Зачёт	*З*
Дифференцированный зачёт	*ДЗ*
Экзамен	*Э*

4 ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Темы эссе (рефератов, докладов, сообщений)

1. История становления теории исследования операций как науки.
2. Теория расписания.
3. Методы планирования.
4. Применение теории исследования операций при решении профессиональных задач в области формирования технологического цикла эксплуатации машин и оборудования на транспорте (управление инфраструктурами на железнодорожном транспорте).
5. Структура и взаимодействие различных видов транспорта.
6. Применение систем оценки надежности и безопасности работ на железнодорожном транспорте.

4.1.2 Подготовка справочного материала

1. Формулы производной и правила дифференцирования.
2. Формулы неопределенного и определенного интеграла.
3. Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.
4. Пределы. Ряды.
5. Графы.
6. Случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия.
7. Вычисление интегралов методами прямоугольников, трапеций и парабол.
8. Метод Эйлера.
9. Решение транспортных задач различными методами.

Контроль выполнения данного вида самостоятельной работы осуществляется во время учебного занятия в виде проверки преподавателем письменного эссе (реферата, доклада, сообщения) или устного выступления обучающегося.

Критерии оценки:

«5» – баллов выставляется обучающемуся, если тема раскрыта всесторонне; материал подобран актуальный, изложен логично и последовательно; материал достаточно иллюстрирован достоверными примерами; презентация выстроена в соответствии с текстом выступления, аргументация и система доказательств корректны.

«4» – баллов выставляется обучающемуся, если тема раскрыта всесторонне; имеются неточности в терминологии и изложении, не искажающие содержание темы; материал подобран актуальный, но изложен с нарушением последовательности; недостаточно достоверных примеров.

«3» – баллов выставляется обучающемуся, если тема сообщения соответствует содержанию, но раскрыта не полностью; имеются серьёзные ошибки в терминологии и изложении, частично искажающие смысл содержания учебного материала; материал изложен непоследовательно и нелогично; недостаточно достоверных примеров.

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если тема не соответствует содержанию, не раскрыта; подобран недостоверный материал; грубые ошибки в терминологии и изложении, полностью искажающие смысл содержания учебного материала; информация изложена нелогично; выводы неверные или отсутствуют.

4.2 Вопросы для устного опроса

1. Какие детали при изображении графа не важны?
2. Что называется маршрутом?
3. Что называется цепью?
4. Что называется циклом?
5. Что такое степень вершины графа?
6. Что называется цепью?
7. Что называется маршрутом?
8. Какие существуют формы комплексных чисел?
9. Что называется циклом?
10. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
11. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
12. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
13. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
14. В чем заключается признак возрастания и убывания функции?
15. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
16. Как записать всю совокупность первообразных функций?
17. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
18. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
19. Может ли площадь криволинейной трапеции быть отрицательной?
20. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
21. Уравнение какого вида называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?
22. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения действительные и различные?
23. Дайте определение ДУЧП.
24. Что такое порядок ДУЧП?
25. Что называется числовым рядом?
26. Перечислите основные задачи комбинаторики.
27. Что называется перестановками?
28. Что называется перемещениями?
29. Что называется сочетаниями?
30. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
31. Что называется условной вероятностью?
32. Какая величина называется дискретной?
33. Что называется законом распределения случайной величиной?
34. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величиной?
35. Что называется дисперсией случайной величины?
36. Какой закон распределения называется биномиальным?
37. Как вычислить определенный интеграл по формуле Симпсона?
38. Что понимается под законом больших чисел?
39. Что такое приближенное дифференцирование?
40. Как найти шаг интерполяции?
41. Как найти первую конечную разность?
42. Какой применяют метод для решения задачи Коши?
43. Как вычислить абсолютную погрешность?
44. Дайте определение производной.
45. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?

46. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
47. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
48. В чем заключается механический смысл производной?

4.3 Тестовые задания

Раздел 1. Математический анализ.

1.Чему равен интеграл $\int_1^3 2xdx$
а. 5
б. 8
в. -8
2. Вычислите производную функции у = 5х-7
а. 5
б. 2
в. -2
3. Уравнение, которое помимо функции содержит её производные:
а. дифференциальное уравнение
б. иррациональное уравнение
в. тригонометрическое уравнение
4. При решении дифференциальных уравнений ищется:
а. вектор
б. число (несколько чисел)
в. функция
5. Укажите правильный ответ $\int_0^2 dx$:
а.0
б.2
в. 4
6. Выберите методы приближенного вычисления определенного интеграла. (возможно несколько вариантов ответа)
а. метод прямоугольников
б. метод трапеций
в. метод ромбов
7. Установите соответствие

1. $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+...$	**а.**гармонический ряд
2. $1+\frac{1}{18}+\frac{1}{18^2}+\frac{1}{18^3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{18}\right)^{n-1}$	**б.**ряд геометрической прогрессии
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}+...$	**в.** обобщенно-гармонический ряд

8. Продолжите последовательность 1, 1, 2, 3, 5:
а. 8
б. 7
в.3
9. Угловая частота первой гармонии ряда Фурье вычисляется по формуле:
а. $a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$; б. $b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$; в. $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$.
10. Продолжите последовательность 5, 7, 12, 19, 31, 50:
а.81
б.61
в.91
Контролируемые компетенции: ОК 01,ОК 02.

Ключ к тесту

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	б	а	а	в	б	а, б	1в,2б,3а	а	в	а

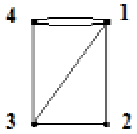
Критерии оценки:
«5» – от 86% до 100% правильных ответов.
«4» – от 76% до 85% правильных ответов.
«3» – от 61% до 75% правильных ответов.
«2» – менее 61% правильных ответов.

Раздел 2. Основы дискретной математики.

1.Даны два множества A = { 2, 3, 4, 5} и B = { 1, 3, 5, 7}. Найдите пересечение данных множеств.
a) (3, 5)
b) (8, 9)
c) (6, 9)
2. Что называется степенью вершины x графа G?
a) число, показывающее направление графа.
b) результат многократного умножения.
c) количество рёбер графа G, принадлежащих вершине x.
3. Даны два множества A = { 1, 3, 4} и B = { 2, 3, 5}. Найдите объединение данных множеств.
a) (1, 4, 5)
b) (1,2,3,4,5)
c) (4, 6, 8)
4. Что называется пересечением множеств?
a) это множество, которому принадлежат те и только те элементы, которые одновременно принадлежат всем данным множествам.
b) это множество, которое содержит все элементы исходных множеств.
c) это множество, в котором не существует ни одного элемента.
5. Дайте понятие графа как математического объекта.
a) совокупность двух множеств — множества вершин, и множества их парных связей, называемого множеством рёбер.
b) объект графической модели квадратичной функции.
c) геометрический образ функции.
6. Установите соответствие

1.Вершина, имеющая нулевую степень, является	a)висячей
2. Вершина, имеющая степень равную 1, является	b)изолированной

7. Определите степень вершины 3, для графа изображенного на рисунке. Запишите ответ



8. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется:
a) нулевым
b) конечным
c) пустым

9. При обозначении множеств используют:
a) только круглые скобки
b) только фигурные скобки
c) иногда круглые, иногда фигурные, иногда одновременно оба вида скобок
10. Множества обозначаются:
a) малыми латинскими буквами
b) большими латинскими буквами
c) кириллицей

Контролируемые компетенции: ОК 01,ОК 02.

<u>Ключ к тесту</u>

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	a	c	b	a	a	1b,2a	3	c	b	b

Критерии оценки:
«5» – от 86% до 100% правильных ответов.
«4» – от 76% до 85% правильных ответов.
«3» – от 61% до 75% правильных ответов.
«2» – менее 61% правильных ответов.

Раздел 3. Основы теории вероятности и математической статистики.

1.Сколькими способами можно составить список из 5 учеников?
a) 120
b) 15
c) 25
d) 5
2. Сколькими способами можно встать в очередь в библиотеку четырём студентам?
a) 14
b) 15
c) 24
d) 5
3. Вычислите 4! (где ! - это факториал)?
a)24
b) 10
c) 25
d) 4
4. Чему равна вероятность достоверного события?
a) 0
b) 1
c) 12
5. Установите соответствие между основными понятиями комбинаторики:

1.перестановки.	a.C
2.размещения.	b.P
3.сочетания.	c.A

6. Установите соответствие:

1. факториал	a.i
2. первообразная.	b.!
3. мнимая единица.	c.F(x)

7. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины *X*, заданной законом распределения:

X	3	4
p	0,4	0,6

Ответ: M(x)=______

8. Раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними:
a. теория случайных цифр
b. теория величин
c.теория вероятностей
9. Чему равна вероятность невозможного события?
a) 0
b) 6
c) -9
10. Дискретная случайной величины *X*, заданна законом распределения, найдите p_2:

X	2	5	8
p	0.2	p_2	0.6

Ответ:_______

Контролируемые компетенции: ОК 01,ОК 02.

Ключ к тесту

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	a	c	a	b	1b,2a,3c	1b,2c,3a	3,6	c	a	0,2

Критерии оценки:
«5» – от 86% до 100% правильных ответов.
«4» – от 76% до 85% правильных ответов.
«3» – от 61% до 75% правильных ответов.
«2» – менее 61% правильных ответов.

Раздел 4. Основные численные методы

1. Формула парабол – это формула
a) Симпсона
b) Ньютона
c) Лейбница
2. Сколько существует методов приближенного вычисления определенных интегралов?
a) 8
b) 6
c) 3
d) 5
3. Δy_0- это…
a) вторая конечная разность
b) седьмая конечная разность
c) пятая конечная разность

d) первая конечная разность

4. Как обозначается шаг интерполяции

a) f

b) Y

c) h

5. Установите соответствие между основными понятиями:

1.формула парабол	a. $\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n))$
2.формула трапеций	b. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0+y_n+2(y_2+y_4+...+y_{n-2})+4(y_1+y_3+...+y_{n-1}))$
3.формула прямоугольников	c. $\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1})$

6. Относительная погрешность вычисляется по формуле:

a) $\delta = \frac{\left|A_{прибл} - A_{точн}\right|}{A_{точн}} 100\%$

c) $\delta = \frac{\left|A_{прибл} + A_{точн}\right|}{A_{точн}} 100\%$

d) $\delta = -\frac{\left|A_{прибл} + A_{точн}\right|}{A_{точн}}$

7. Найдите область определения функции y(x)= $6x^2 + 6x + 6$

Ответ: D(x)=______

8. С помощью какого метода можно решить задачу Коши?

a. метод Эйлера

b. метод Симпсона

c. метод Ньютона

9. По таблице значений функции

x	*0*	*1*	*2*
y	*3*	6	*8*

составлена таблица конечных разностей:

X	*Y*	Δy
0 *1* *2*	*3* *6* *8*	

Найдите Δy_0.

Ответ:___________

10. Найдите множество значений функции y(x)= $6x^2 + 6x + 6$

Ответ: E(x)=______

Контролируемые компетенции: ОК 01,ОК 02.

<u>Ключ к тесту</u>

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	a	c	d	c	2c,3a,1b	a	R	a	3	[4,5; +∞)

Критерии оценки:
«5» – от 86% до 100% правильных ответов.
«4» – от 76% до 85% правильных ответов.
«3» – от 61% до 75% правильных ответов.
«2» – менее 61% правильных ответов.

Раздел 5. Линейное программирование

1. Сколько существует методов решения транспортных задач?
а. более 10
б. более 20
в. более 3
2. Какими двумя типами представлены транспортные задачи?
а. внутренние и внешние
б. открытые и закрытые
в. положительные и отрицательные
3. Транспортная задача – это задача…
а. Монжа-Канторовича
б. Ньютона
в. Эйлера
4. Модель транспортной задачи – это:
а. модель задачи линейного программирования
б. модель динамического программирования
в. модель сетевого программирования
5. Транспортная задача может быть задана:
а.формулой
б.таблицей
в. примером
6. Любое неотрицательное решение систем при решении транспортной задачи называется:
а. допустимым планом
б. недопустимым планом
в. простым планом
7. Число пунктов отправления m=3,а число пунктов назначения n=4, следовательно опорный план транспортной задачи определяется по формуле?
а. m+n-8
б. m+n-1
в.m-n+9
8. В транспортной задаче предполагается перевозка:
а. однородного продукта
б. разнородных продуктов
в.всевозможных материалов
г. разнородных комплектов
9. Коэффициенты в системе ограничений транспортной задачи равны:
а.1 или 0
б.8 или 10
в.5 или 6
10. Склад 1, склад 2 , …, склад - это:
а.пункты отправления
б.пункты прибытия
в.пункты доставки

Контролируемые компетенции: ОК 01,ОК 02.

Ключ к тесту

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Правильный ответ	а	б	а	а	б	а	б	в	а	а

Критерии оценки:
«5» – от 86% до 100% правильных ответов.
«4» – от 76% до 85% правильных ответов.
«3» – от 61% до 75% правильных ответов.
«2» – менее 61% правильных ответов.

Таблица 3 - Форма информационной карты банка тестовых заданий

Наименование разделов	Всего ТЗ	Количество форм ТЗ				Контролируемые компетенции
		Открытого типа	Закрытого типа	На соответствие	Упорядочение	
Раздел 1. Математический анализ.	**13**	**-**	**9**	**1**	**-**	ОК 01,ОК 02
Раздел 2 . Основы дискретной математики.	**10**	**1**	**8**	**1**	**-**	ОК 01,ОК 02
Раздел3. Основы теории вероятности и математической статистики.	**10**	**3**	**5**	**2**	**-**	ОК 01,ОК 02
Раздел 4. Основные численные методы.	**10**	**3**	**6**	**1**	**-**	ОК 01,ОК 02
Раздел 5. Линейное программирование.	**10**	**1**	**9**	**-**	**-**	ОК 01,ОК 02

4.4 Практические работы

Практическое занятие №1.
Вычисление производных сложных функций

Цель: приобрести навыки вычисления производных сложных функций.
Задание: Найдите производную функции.

1. $y = (x^2 + 3x)^5$
2. $y = \ln tg^3 3x$
3. $y = \dfrac{3x+1}{e^x}$.
4. $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^3$
5. $y = \sqrt{x^3 + 5}$
6. $y = \ln\sqrt{2x - 1}$
7. $y = \log_5 \cos 7x$
8. $y = 2^{\sin 3x}$

Контрольные вопросы для защиты:

1. Дайте определение производной.
2. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
3. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?

Ответы и комментарии:

1. $y = (x^2 + 3x)^5$.

Решение. Данная функция является сложной, порядок следования промежуточных функций таков: $y = u^5$, $u = x^2 + 3x$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, находим $y_x' = y_u' u_x' = 5(x^2 + 3x)^4(2x + 3)$.

Ответ: $5(x^2 + 3x)^4(2x + 3)$.

2. $y = \ln tg^3 3x$.

Решение. Порядок следования промежуточных функций: $y = \ln u$, $u = v^3$, $v = tg\, z$, $z = 3x$. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\ln tg^3 3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot (tg^3 3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 3tg^2 3x \cdot (tg\ 3x)'$$
$$= \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 3tg^2 3x \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot (3x)' = \frac{1}{tg^2 3x} \cdot 3tg^2 3x \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{9}{cos^2 3x}$$

Ответ: $\dfrac{9}{cos^2 3x}$.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №2.
Приложение производной для вычисления механических и физических величин

Цель: научиться определять максимум мощности в цепи постоянного тока с применением производной. Приобрести навыки применения производной при вычислении геометрических величин.

Задание:

1. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 3$, если касательная образует с осью *Ох* угол 45°.
2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 4x^2 + 8x$+6 в точке (2; 14).
3. В какой точке касательная к кривой $y = -x^2 + x + \frac{3}{4}$параллельна оси абсцисс.
4. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y = x^2$и $y = x^3$ параллельны.
5. Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 3В, а внутреннее сопротивление равно 2 Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность? Найдите максимальное значение мощности. При каком сопротивлении нагрузки полезная мощность источника тока максимальна.
6. Материальная точка движется по закону $S = 6t^3 - 3t^2$(м). Найдите скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 10$ (с).
7. Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $S = 2t^2 + 3t - 1$. Найдите кинетическую энергию тела через 3 секунды после начала движения.
8. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени *t*=0, задается формулой $Q = 3t^2 - 3t + 4$. Найти силу тока в конце 6-й секунды.
9. Под каким углом пересекаются кривые $y = 2^x$и $y = \sqrt{1 + x}$.

Контрольные вопросы для защиты:

1. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
2. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
3 .В чем заключается механический смысл производной?

<u>Ответы и комментарии:</u>

1. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 3$, если касательная образует с осью *Ох* угол 45°.

Решение.

Касательная образует с осью *Ох* угол $45^\circ \Rightarrow k = tg45^\circ = 1 \Rightarrow y' = 2x - 4 = 1 \Rightarrow x_0 = 2{,}5$ - абсцисса точки касания$\Rightarrow y_0 = -0{,}75 \Rightarrow y - (-0{,}75) = 1(x - 2{,}5) \Rightarrow y = x - 3{,}25$ - уравнение касательной.

Ответ: $y = x - 3{,}25$.

5. Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 3В, а внутреннее сопротивление равно 2 Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Решение.

Мощность, потребляемая электронагревательным прибором, сопротивление которого равно R, вычисляется по формуле $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. Обозначим сопротивление прибора R=x. С учетом данных задачи составим функцию $y = P(x) = \frac{9x}{(2+x)^2} = \frac{9x}{x^2+4x+4}$. Область определения этой функции – промежуток $(0; +\infty)$. Исследуем полученную функцию на экстремум.

$y' = P'(x) = \left(\frac{9x}{x^2+4x+4}\right)' = \frac{36-9x^2}{(x^2+4x+4)^2}$.

Критические точки определяются уравнением $36 - 9x^2 = 0$: x_1=-2 (точка не входит в область определения); x_2=2.

x	(0;2)	2	$(2; +\infty)$
y'	+	max	-

Так как при переходе через точку x=2 производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Значит, мощность, потребляемая прибором, будет наибольшей, если сопротивление его равно 2 Ом.

*Ответ:*2 Ом.

6. Материальная точка движется по закону $S(t) = 6t^3 - t^2$ (м). Найдите скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 10$ (с).

Решение.

$v(t) = S'(t) = (6t^3 - t^2)' = 18t^2 - 2t$, $t \in (0;\infty)$ - закон, по которому изменяется скорость материальной точки.

Скорость в момент времени $t_0 = 10$: $v(10) = 18 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 = 1600$ (м/с).

$a(t) = v'(t) = (18t^2 - 2t)' = 36t - 2$, $t \in (0;\infty)$ - закон, по которому изменяется ускорение материальной точки.

Ускорение в момент времени $t_0 = 10$: $a(10) = 36 \cdot 10 - 2 = 328$ (м/с^2).

Ответ: 1600 м/с; 328 м/с^2.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №3
Вычисление простейших определенных интегралов.

Цель: научиться вычислять простейшие определенные интегралы
Задание: Вычислить определенные интегралы

1) $\int_{-1}^{1}(2x+1)dx$

2) $\int_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx$

3) $\int_{1}^{2}(5x^4+2x-8)dx$

4) $\int_{1}^{2}(2u+1)^3du$

5) $\int_{0}^{1}(e^x-1)^4e^x dx$

6) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}sin^3x\cos x\,dx$

Контрольные вопросы для защиты:

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Что в записи $\int_a^b f(x)\,dx$ означают: а) числа*a* и*b*; б) *x*; в)$f(x)$; г) $f(x)\,dx$? Может ли быть *a* =*b*; *a*>*b*.
3. Зависит ли приращение *F(b)-F(a)*от выбора первообразной?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

Ответы и комментарии:

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$	**11.** $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \in N, n \ne -1)$	**12.** $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	**13.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	**14.** $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**15.** $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\,\frac{x}{2}\right\rvert + C$
6. $\int \sin xdx = -\cos x + C$	**16.** $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a} + C$, $(a = const)$
7. $\int \cos xdx = \sin x + C$	**17.** $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$,$(a = const)$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	**18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $(a = const)$
9. $\int e^x dx = e^x + C$	**19.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$,$(a = const)$
10. $\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	

Основные свойства интегралов

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$

3. $\int f(kx+m)dx = \frac{F(kx+m)}{k} + C$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной):

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

3. Метод интегрирование по частям: $\int udv = uv - \int vdu$

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ - формула Ньютона Лейбница

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №4
Вычисление площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла

Цель: приобрести навык вычисления площадей и объемов с применением определенного интеграла.

Задание:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$ и прямой $y = x + 2$.
2. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{3} + 1$, прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.
3. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 - x + 1 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1$. Сделать чертёж

Контрольные вопросы для защиты:

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

3. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
4. Приведите приметы физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

<u>Ответы и комментарии:</u>

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6$ и прямой $y = x + 2$.

Решение.

Площадь фигуры, ограниченная сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу – непрерывной кривой $y = \varphi(x)$, слева – прямой $x = a$ и справа прямой $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx.$$

В тех случаях, когда заданные кривые образуют замкнутую область, и прямые $x = a$ и $x = b$ не заданы, то числа a и b совпадают с абсциссами точек пересечения кривых. Найдём точки пересечения заданных линий. Для этого решим совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - \frac{x^2}{2} + 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x + 2 = 2x - \frac{x^2}{2} + 6.$$

$$x + 2 = 2x - \frac{x^2}{2} + 6 \,\Big|\, \cdot 2,$$

$$2x + 4 = 4x - x^2 + 12,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Получим $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$; следовательно, $a = -2$ и $b = 4$.

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(-2;0)$ и $B(4;6)$. Для построения прямой достаточно двух найденных точек, но для параболы этих данных недостаточно. Поэтому найдем дополнительные точки:

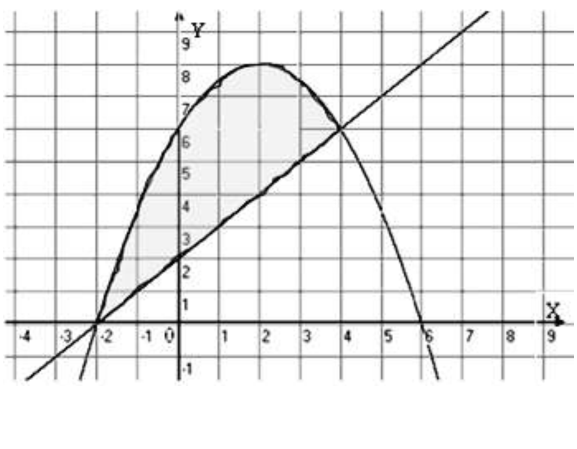
а) вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ расположена в точке с координатами $\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$; в данной задаче парабола $y = -\frac{x^2}{2} + 2x + 6$ ($a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$) имеет вершину в точке $(2; y(2))$, т.е. $(2;8)$.

б) Так как $a = -\frac{1}{2} < 0$, следовательно, ветви параболы направлены вниз, и она пересекает ось абсцисс. Найдём точки пересечения с осью Ox:

$$y = 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{2} + 2x + 6 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 = 16,$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{-1} = -2,$$



$$x_2 = \frac{-2-4}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

Рис. 1

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках с координатами $(-2;0)$ и $(6;0)$ (рис.1).

Применяя $S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$, получим:

$$S = \int_{-2}^{4}\left(\left(2x - \frac{x^2}{2} + 6\right) - (x+2)\right)dx = \int_{-2}^{4}\left(-\frac{x^2}{2} + x + 4\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-2}^{4} =$$

$$= 8 - \frac{64}{6} + 16 - 2 - \frac{8}{6} + 8 = 30 - 12 = 18.$$

Ответ: 18 кв. ед.

2. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{3} + 1$, прямыми $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Решение.

а) Объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox, криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле: $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$.

Подставляя в формулу $a = 0, b = 3$ и $y = \frac{x^2}{3} + 1$ (рис. 2), получим:

$$V_x = \pi\int_0^3\left(\frac{x^2}{3} + 1\right)^2 dx = \pi\int_0^3\left(\frac{x^4}{9} + \frac{2x^2}{3} + 1\right)dx = \pi\left(\frac{x^5}{45} + \frac{2x^3}{9} + x\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left(\frac{27}{5} + 6 + 3\right) = 14{,}4\pi.$$

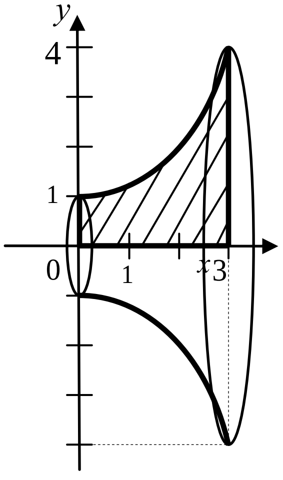


Рис. 2

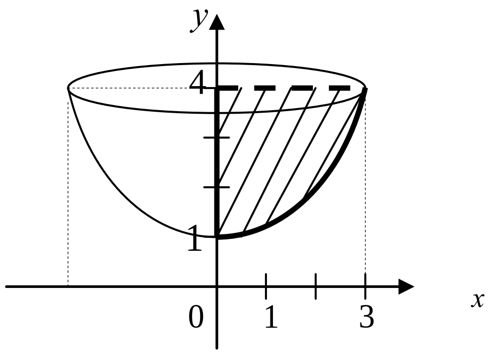


Рис. 3

б) Объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy, криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью Oy и прямыми $y = a$ и $y = b$, вычисляется по формуле: $V_y = \pi\int_a^b x^2 dy$.

Из уравнения параболы $y = \frac{x^2}{3} + 1$ выразим x^2:

$$\frac{x^2}{3} = y - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3y - 3.$$

По рисунку 3 определяем: $a = 1, b = 4$.

Тогда:

$$V_y = \pi \int_1^4 (3y - 3) dy = \pi \left(\frac{3y^2}{2} - 3y \right) \Bigg|_1^4 = \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot 4^2}{2} - 3 \cdot 4 \right) - \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot 1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) = 13{,}5\pi.$$

Ответ: а) $V_x = 14{,}4$ куб. ед.; б) $V_y = 13{,}5$ куб. ед.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №5
Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Цель: приобрести навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Задание: Найдите общее решение уравнения: $(x+1)^3\,dy - (y-2)^2\,dx = 0$.

1. Найдите общее решение дифференциального уравнения методом разделения переменных: $\cos x \frac{dy}{dx} = (y+1)\sin x$.
2. Найдите частное решение уравнения первого порядка $2x^2\,dy - y^2\,dx = 0$, удовлетворяющее условию y_o=1 при x_o=1.
3. Решите линейное уравнение первого порядка: $y' - y = e^x$.

Контрольные вопросы для защиты:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка?
6. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений

<u>Ответы и комментарии:</u>

1.Найти общее решение уравнение $1+y'+y+xy'=0$

Решение.

Заметим y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$$

Умножим все члены равенства на dx: $dx+dy+ydx+xdy=0$

Сгруппируем все члены, содержащие dy и dx, и запишем полученные выражения в разных частях равенства: $(1+x)dy=-(1+y)dx$

Разделим обе части равенства на выражение $(1+x)(1+y)$:

$$\frac{dy}{1+y}=-\frac{dx}{1+x}$$

Интегрируя обе части равенства, имеем:

$$\int\frac{dy}{1+y}=-\int\frac{dx}{1+x};$$

$$\ln|1+y|=-\ln|1+x|+\ln C;$$

$$\ln|1+y|=\ln\left|\frac{C}{1+x}\right|;$$

$$1+y=\frac{C}{1+x};\, y=\frac{C}{1+x}-1$$

Ответ: $y=\frac{C}{1+x}-1.$

2. Решить уравнение $y'+2y+3=0$

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=-(2y+3);\frac{dy}{2y+3}=-dx;\int\frac{dy}{2y+3}=-\int dx;\ln|2y+3|=-x+\ln C;\ln\frac{2y+3}{C}=-x,$$

$$\frac{2y+3}{C}=e^{-x};2y+3=Ce^{-x},\, y=Ce^{-x}-\frac{3}{2}$$

Ответ: $y=Ce^{-x}-\frac{3}{2}$.

3. Найти общее решение уравнения $y''=4x$

Решение:

$$\frac{dy'}{dx}=4x;dy'=4xdx;y'=4\int xdx=2x^2+C_1;\ \frac{dy}{dx}=2x^2+C_1;dy=(2x^2+C_1)dx;$$

$$y=\int(2x^2+C_1)dx=2\int x^2dx+C_1\int dx=\frac{2}{3}x^3+C_1x+C_2$$

Полученный результат проверим дифференцированием

$$y'=\frac{2}{3}3x^2+C_1=2x^2+C_1;y''=4x$$

4. Решить задачу Коши для уравнения $y''=1+x+x^2+x^3$, если $y=1$ и $y'=1$ при $x=0$.

Решение:

$$\frac{dy}{dx}=\int(1+x+x^2+x^3)dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C_1$$

$$y=\int(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C_1)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}+C_1x+C_2$$

Подставив начальные условия $y=1$ и $y'=1$ при $x=0$, получим $C_1=1,\ C_2=1$.

Следовательно, $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}+x+1$.

5. Тело движется прямолинейно с ускорением $a=6t-4$. При $t=0$ начальный путь $s_0=0$, начальная скорость $v_0=4$. Найти скорость и пройденный путь как функции времени.

Решение: Согласно условию, имеем $s''=6t-4$. Интегрируя обе части этого уравнения, получим $\frac{ds}{dt}=3t^2-4t+C_1$, т.е. скорость выражена как функция времени.

Интегрируя обе части последнего уравнения, выразим путь как функцию времени: $s=t^3-2t^2+C_1t+C_2$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных данных $v_0=4$ и $s_0=0$ при $t=0$. Подставив эти данные в выражения $\frac{ds}{dt}$ и s, находим $C_1=4$, $C_2=0$.

Тогда скорость тела и пройденный им путь окончательно запишутся в виде

$v=3t^2-4t+4$, $\qquad s=t^3-2t^2+4t$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка: а) $y''+2y'-3y=0$; б) $y''+6y'+9y=0$; в) $y''-4y'+13y=0$.

Решение.

а) $y''+2y'-3y=0$

Характеристическое уравнение $k^2+2k-3=0$ имеет корни $k_1=-3$ и $k_2=1$. Следовательно, $y_0=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$.

б) $y''+6y'+9y=0$

Характеристическое уравнение $k^2+6k+9=0$ имеет корни $k_1=k_2=k=-3$. Следовательно, $y_0=e^{kx}(C_1+C_2\cdot x)=e^{-3x}(C_1+C_2\cdot x)$;

в) $y''-4y'+13y=0$

Характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$ имеет корни $k_1=\alpha+\beta i=2+3i$ и $k_2=\alpha-\beta i=2-3i$. Следовательно,

$y_0=e^{\alpha x}(C_1\cdot\sin\beta x+C_2\cdot\cos\beta x)=e^{2x}(C_1\cdot\sin 3x+C_2\cdot\cos 3x)$.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №6
Разложение функций в ряд Фурье

Цель: приобрести навык разложения функций в ряд Фурье.
Задание: Разложите в ряд Фурье функции:

а. $y = x$ для $0 < x < 2\pi$
б. $y = \sin x$для $0 \leq x \leq \pi$

Контрольные вопросы для защиты:

1. В чем заключается метод Фурье?
2. Запишите формулу ряда Фурье.

<u>Ответы и комментарии:</u>

В целом ряде задач (дифференциальные уравнения, теория колебаний) бывает нужно заменить данную периодическую функцию *f(x)* с периодом *T* тригонометрической суммой

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$, которая называется рядом Фурье.

a_n, b_n - коэффициенты Фурье, которые вычисляются по формулам Эйлера.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №7
Расчет электрических цепей несинусоидальных периодических токов с применением рядов Фурье

Цель: приобрести навык расчета электрических цепей несинусоидальных периодических токов с применением рядов Фурье.
Задание: 1.Найти коэффициенты a_k и b_k ряда Фурье, определяющего решение волнового уравнения$u = \frac{2h}{l^2} x(l - x)$

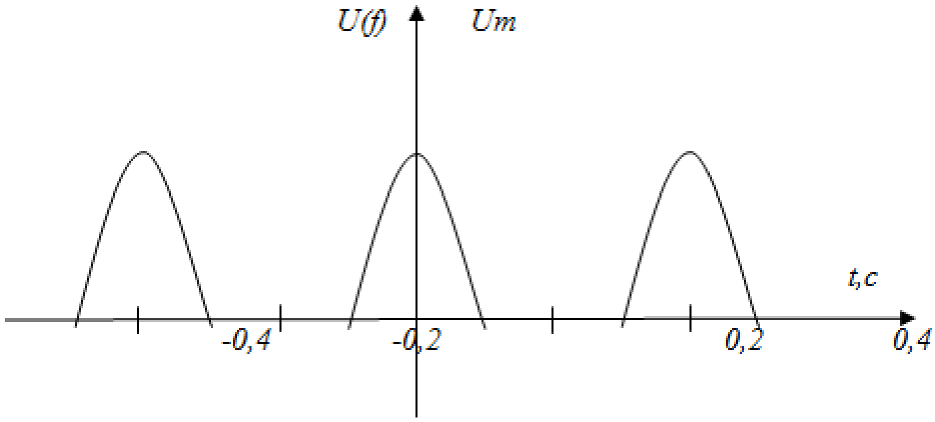
2. Определить действующие значения несинусоидального напряжения U, тока I и активную мощность цепи P.$u = 150 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$

Контрольные вопросы для защиты:

1. Запишите формулы Эйлера для коэффициентов ряда Фурье.
2. Перечислите основные свойства рядов Фурье.

Ответы и комментарии:

1. Разложить в тригонометрический ряд периодическую функцию, имеющую форму напряжения на выходе однополупериодного выпрямителя.



Решение. Нетрудно определить, что период повторения импульсов T=0.4с. Частота первой гармоники $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi$ рад/с. В пределах периода напряжение u(t) определяется выражениями

$$u(t) = \begin{cases} 0, -0.2 \le t \le -0.1 \\ U_m \cos 5\pi t, -0.1 \le t \le 0.1 \\ 0{,}0.1 \le t \le 0. \end{cases}$$

Поскольку функция времени на рис 16.4 четная, разложение в ряд Фурье не содержит синусных составляющих. Определим коэффициенты ряда с помощью формул. Учтем, что $u(t)$ отличается от нуля только на интервале от -0.1 до 0.1. Поэтому

$$a_n = \frac{1}{0.2}\int_{-0.1}^{0.1} U_m \cos 5\pi t dt = \frac{U_m}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{0.2}\int_{-0.1}^{0.1} U_m \cos 5\pi t \cos 5n\pi\, dt = \frac{5U_m}{\pi}\int_{-0.1}^{0.1} [\cos 5\pi(n+1)t + \cos 5\pi(n-1)t]dt$$

При $n = 1$

$$a_1 = \frac{5U_m}{2}\int_{-0.1}^{0.1} [\cos 10\pi t + 1]dt = \frac{1}{2}U_m$$

При$n \ne 1$

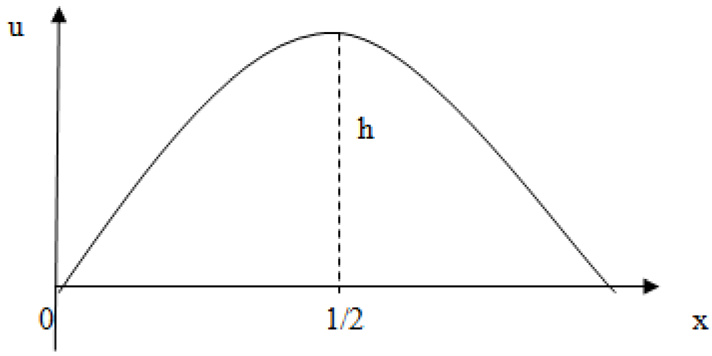
$$a_n = \frac{5U_m}{2}\int_{-0.1}^{0.1} [\cos 5\pi(n+1)t + \cos 5\pi(n-1)t]dt = \frac{2}{\pi}U_m \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{1-n^2}$$

Итак, разложение в ряд Фурье функции времени, показанной на рис.16.4, имеет вид

$$u(t) = U_m\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos 5\pi t + \frac{2}{3\pi}\cos 10\pi t - \frac{2}{15\pi}\cos 20\pi t + \frac{2}{35\pi}\cos 30\pi t - \ldots\right].$$

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях упругой струны, натянутой вдоль оси Ох, закрепленной на концах. Пусть в какой-то момент времени струна выводится из состояния покоя каким-либо внешним воздействием (например, щипок). Возникают свободные колебания струны. Предположим, что каждая точка струны отклоняется по перпендикуляру к оси Ох, и все эти перпендикуляры лежат в одной плоскости. Кроме того, это «малые» колебания струны, т.е. угол между касательной к струне и осью Ох остается все время малым.

2. Струна, закрепленная на концах *x= 0, x = l*имеет в начальный момент t = *0* форму параболы $u = \frac{4h}{l^2}x(l-x)$. Начальные скорости отсутствуют. Смещение точек струны от оси абсцисс имеет вид…



Струна, закрепленная на концах

Решение:

Запишем начальные условия:

u(x, 0) = f(x) = $\frac{4h}{l^2}x(x-1)$,

φ(*x*) = 0.

Найдем коэффициенты a_k и b_k ряда Фурье, определяющего решение волнового уравнения по формулам

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{8h}{l^3}\int_0^l (lx-x^2)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$= -\frac{8h}{l^3}(lx-x^3)\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\,\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} + \frac{16h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)*\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{8h}{k^2\pi^2 l}\int_0^l (l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix}$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3} * [1-(-1)^k].$$

$b^k = 0; k = 1, 2, ….$

При k = 2n$a_k = 0$.

Окончательно

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l} * \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$$

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №8
Сумма ряда. Признак Даламбера

Цель: научиться применять числовые ряды при решении прикладных задач.

Задание:

1. Докажите, что ряд сходится и найдите его сумму:

а. а) $1+\frac{1}{18}+\frac{1}{18^2}+\frac{1}{18^3}+\ldots$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n+5}\right)$

2. Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{8^n}$.

Контрольные вопросы для защиты:

1. Какие ряды называются сходящимися?
2. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Сформулируйте признак Даламбера.

<u>Ответы и комментарии:</u>

1. Докажите, что ряд сходится и найдите его сумму:

б. $1+\frac{1}{18}+\frac{1}{18^2}+\frac{1}{18^3}+\ldots$

в. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n+5}\right)$

Решение:

а. $$1+\frac{1}{18}+\frac{1}{18^2}+\frac{1}{18^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{18}\right)^{n-1}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$ - ряд геометрической прогрессии.

$$\begin{cases}|q|\geq 1-\text{ряд расходится}\\ |q|<1-\text{ряд сходится}, S=\dfrac{a}{1-q}\end{cases}.$$

Для данного ряда $a=1$, $q=\frac{1}{18}<1$, следовательно, ряд сходится и сумма ряда равна $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{18}}=\dfrac{1}{\frac{18}{18}-\frac{1}{18}}=\dfrac{1}{\frac{17}{18}}=\frac{18}{17}=1\frac{1}{17}$.

б. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n+5}\right)$ Числовой ряд называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $S=\lim_{n\to\infty}S_n$, где $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

$a_1=[n=1]=\frac{1}{5}-\frac{1}{13}$, $a_2=[n=2]=\frac{1}{13}-\frac{1}{21}$; $a_3=[n=3]=\frac{1}{21}-\frac{1}{29}$; $a_4=[n=4]=\frac{1}{29}-\frac{1}{37}$; …, $a_n=\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n+5}$.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n. = \frac{1}{5} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{21} + \frac{1}{21} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{37} + ... + \frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n+5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8n+5}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8n+5}\right) = \frac{1}{5}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n+5}\right) = \frac{1}{5}.$$

Ответ: а) $1\frac{1}{17}$,б) $\frac{1}{5}$.

2. Исследовать ряд на сходимость по признаку Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{8^n}$.

Решение:

Применим признак сходимости Даламбера. Сначала запишем формулы для n-го и $(n+1)$-го членов ряда:, $a_n = \frac{n^3}{8^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{8^{n+1}}$.

$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{8^{n+1}} : \frac{n^3}{8^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{8^n \cdot 8}\cdot\frac{8^n}{n^3}\right) = \frac{1}{8} < 1$, следовательно, ряд сходится по признаку Даламбера.

Ответ: ряд сходится.

3. Исследовать ряды на сходимость по признаку Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}.$$

Решение.

$a_n = \frac{n!}{5^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$.

$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{5^{n+1}} : \frac{n!}{5^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot(n+1)}{5^n \cdot 5}\cdot\frac{5^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5}\right) = \infty > 1,$ следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

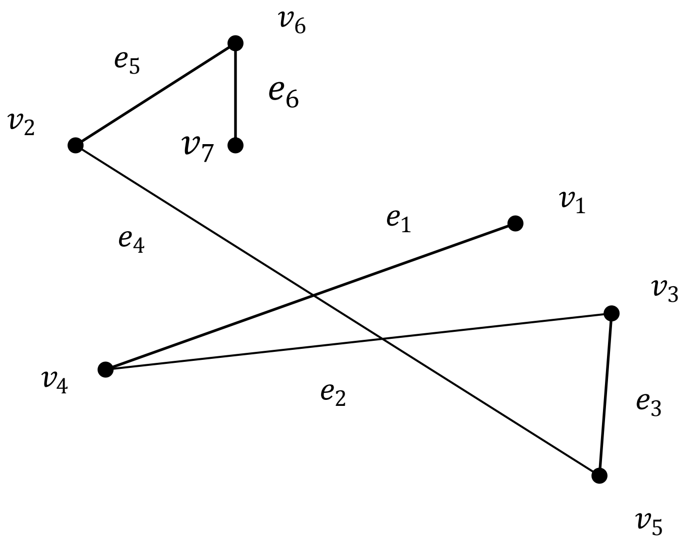
«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

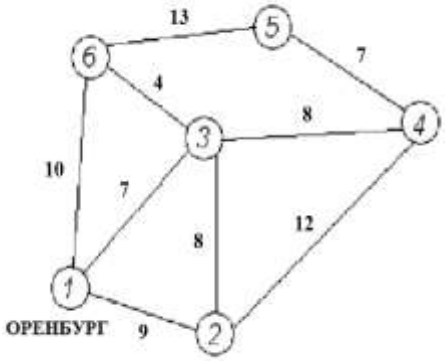
Практическое занятие №9

Построение графа по условию ситуационных задач

Цель: знать основные понятия теории графов.
Задание:
1. Задать граф, представленный на рисунке через множество вершин V и ребер E.



2. Дана сеть железных дорог, соединяющих населенные пункты. Найти кратчайшие пути от города Оренбурга (1) до каждого населенного пункта (если двигаться можно только по дорогам).

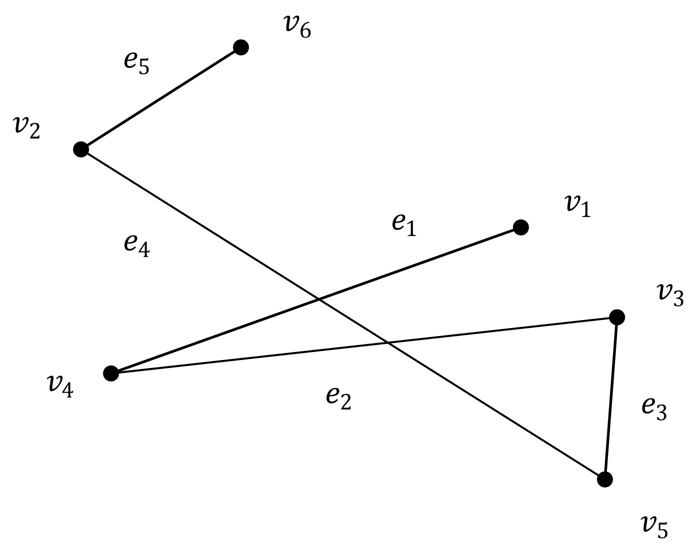


Контрольные вопросы для защиты:

1. Дать определение графа.
2. Какие детали при изображении графа не важны?
3. Что называется маршрутом, цепью, циклом?

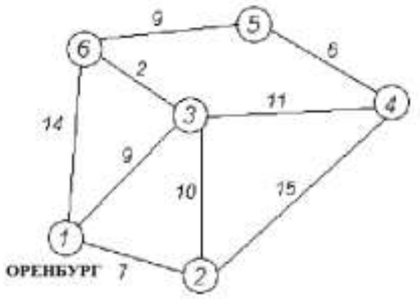
Ответы и комментарии:

1.Задать граф, представленный на рисунке через множество вершин V и ребер E.

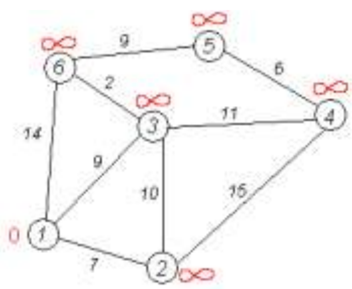


Решение: Множество поименованных вершин V={$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$}.
Множество поименованных ребер E={e_1, e_2, e_3, e_4, e_5}.
Для задания графа требуется установить отношение инцидентности ребер соответствующим вершинам.
Множество ребер, каждое из которых представлено парой своих концевых вершин:
E={(v_1, v_4),(v_4, v_3),(v_3, v_5),(v_5, v_2),(v_2, v_6)}.
Порядок указания вершин при описании ребра здесь безразличен, т.к. все ребра в графе G неориентированы.

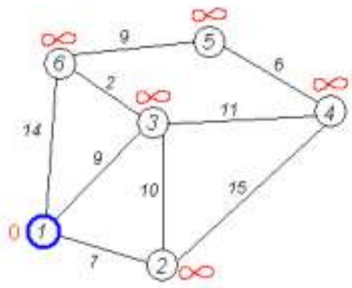
2. Дана сеть автомобильных дорог, соединяющих населенные пункты Оренбургской области. Найти кратчайшие пути от города Оренбурга (1) до каждого населенного пункта области (если двигаться можно только по дорогам).



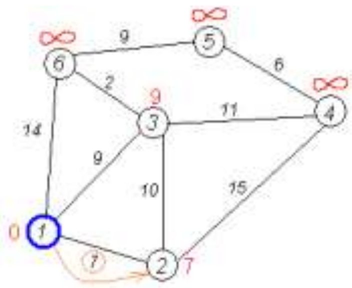
Решение: Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (ребра графа). В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначена их «цена» — длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.



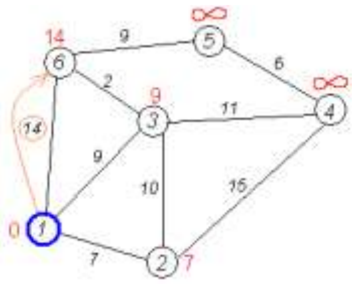
Первый шаг. Рассмотрим шаг алгоритма Дейкстры для нашего примера. Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6.



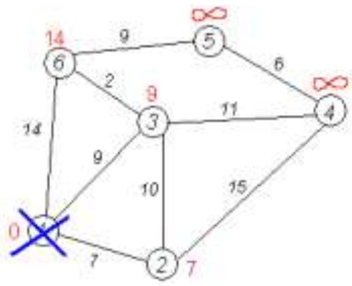
Первый по очереди сосед вершины 1 – вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна сумме кратчайшего расстояния до вершины 1, значению её метки, и длины ребра, идущего из 1-й в 2-ю, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2, бесконечности, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.



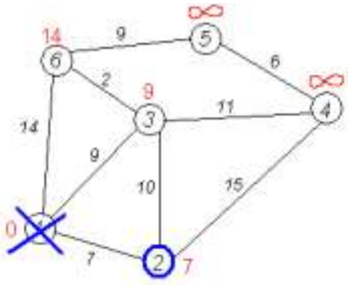
Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины – 3-й и 6-й.



Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит (то, что это действительно так, впервые доказал Э. Дейкстра). Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.



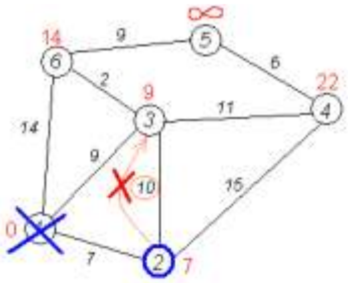
Второй шаг. Шаг алгоритма повторяется. Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.



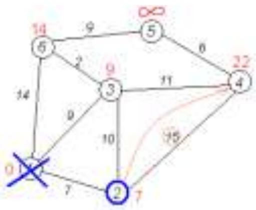
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю вершину. Соседями вершины 2 являются вершины 1, 3 и 4.

Первый (по порядку) сосед вершины 2 – вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.

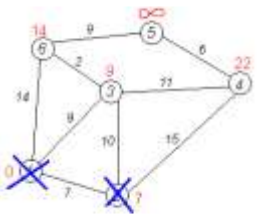
Следующий сосед вершины 2 – вершина 3, так как имеет минимальную метку из вершин, отмеченных как не посещённые. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет равна 17 (7 + 10 = 17). Но текущая метка третьей вершины равна 9<17, поэтому метка не меняется.



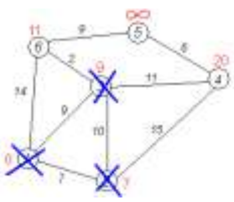
Ещё один сосед вершины 2 – вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет равна сумме кратчайшего расстояния до 2-й вершины и расстояния между вершинами 2 и 4, то есть 22 (7 + 15 = 22). Поскольку 22<∞, устанавливаем метку вершины 4 равной 22.



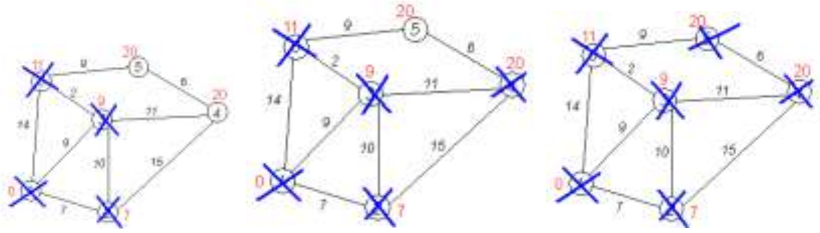
Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем её как посещенную.



Третий шаг. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После её «обработки» получим такие результаты:



Дальнейшие шаги. Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин. Это будут вершины 6, 4 и 5, соответственно порядку.



Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда нельзя больше обработать ни одной вершины. В данном примере все вершины зачеркнуты, однако ошибочно полагать, что так будет в любом примере - некоторые вершины могут остаться незачеркнутыми, если до них нельзя добраться. Результат работы алгоритма виден на последнем рисунке: d(1;2)=7, d(1;3)=9, d(1;4)=20, d(1;5)=20, d(1;6)=11.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №10
Применение комбинаторики и вероятности события при решении профессиональных задач

Цель: приобрести навык решения прикладных задач на нахождение вероятности события, на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

Задание:

1. Трое пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

2. Вероятность того, что человек находящийся на перроне станции, ожидает электричку, равна 0,5. Найти вероятность, того, что среди отобранных 8 человек ровно 6 ожидают электричку.

3. Три вагоностроительных завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50%, второй – 20%, а третий – 30% всей продукции. Первый завод выпускает 1% брака, второй завод – 2% и третий – 3%. Наудачу отобранный вагон оказался с браком. Найти вероятность того, что вагон произведен вторым заводом.

4. В урне содержится 8 белых и 6 красных шаров. Случайным образом вынимают 4 шаров. Какова вероятность того, что среди них имеется: а) ровно 3 белых шаров; б) меньше, чем 3 белых шаров; в) хотя бы один белый шар.

5. Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистические исследования показали, что вероятности выделения кредита этими банками оценивается следующим образом: для первого банка $p_1 = 0{,}5$, для второго банка $p_2 = 2{,}5$ и для третьего банка p_3 = 4,5.
Банки выделяют кредит независимо друг от друга, и если примут решение о его выделении, в размере: первый банк – 10 млн. руб., второй банк – 10 млн. руб., третий банк – 20 млн. руб.
Рассмотрим следующие события:
А – первый банк выделил кредит;
В – второй банк выделил кредит;
С – третий банк выделил кредит.

Интересы предприятия, обратившегося за кредитом, описываются событиями D и E.
D – получен кредит 20 млн. руб., E – получен кредит не менее 30 млн. руб.

Выразить эти события через события A, B, C и найти их вероятности.

6. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: 25 с первого завода, 35 со второго завода, 40 с третьего завода. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0,9 , на втором 0,8 , на третьем 0,7. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным? Какова вероятность того, что качественное изделие будет с первого завода?

Контрольные вопросы для защиты:

1. Что называется n-факториалом?
2. Перечислите основные задачи комбинаторики.
3. Что называется перестановками?
4. Запишите формулы для вычисления перестановок.
5. Что называется размещениями?
6. Запишите формулу для вычисления размещений.
7. Что называется сочетаниями?
8. Запишите формулу для вычисления сочетаний.

<u>Ответы и комментарии:</u>

1.Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение.

Имеем $n=3$, тогда $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Таким образом, можно составить 6 цифр.

2.Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение.

Имеем *n*= 6, *m* = 2 ; $A_6^2 = \dfrac{6!}{(6-2)!} = \dfrac{6!}{4!} = 5\cdot 6 = 30$. Таким образом, можно составить 30 сигналов.

3.Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение.

Имеем $n=10$, $m=2$, $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = \dfrac{10!}{2!\cdot 8!} = \dfrac{8!\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 8!} = 9\cdot 5 = 45$. Такимобразом, имеется 45 способов.

4.В ящике 4 белых, 5 красных, 8 зеленых и 3 голубых шара. Шары перемешивают и наудачу извлекают 1 шар. Какова вероятность события, состоящего в том, что шар окажется цветным?

Решение.

Всевозможными элементарными исходами являются события:

A = {извлечение белого шара},

B = {извлечение красного шара},

C = {извлечение зеленого шара}.

D= {извлечение голубого шара}.

Необходимо найти событие, состоящего в появлении события B. или С, или D. т.е. события $B + C + D$. Так как события B, C, D - несовместны, то

$$P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}+\frac{3}{20}=\frac{16}{20}=0{,}8.$$

Таким образом, вероятность извлечения цветного шара равна 0,8 .

5.В ящике 60 груш сорта А и 40 груш сорта В. Отбирают две груши Определить вероятности следующих событий:

а) обе груши сорта А :

б) обе груши сорта В :

в) одна груша соргаА, а другая груша сорта В.

Решение.

Обозначим:

A_1 = {при первом извлечении взята груша сорта А},

A_2 ={при втором извлечении взята груша сорта А},

B_1 ={при первом извлечении взята груша сорта В}.

B_2 ={при втором извлечении взята груша сорта В}.

Таким образом, нужно найти:

а)Р(A_1 и A_2); **б)** Р(B_1 и B_2); **в)**Р((A_1 и B_2) или (B_1и A_2)).

Находим:

а) $P(A_1\cdot A_2)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2/A_1)=\frac{60}{100}\cdot\frac{59}{99}=0{,}36$, т.е. вероятность того, что обе груши сорта А, равна 0,36.

б) $P(B_1\cdot B_2)=\mathrm{P}(B_1)\cdot\mathrm{P}(B_2/B_1)=\frac{40}{100}\cdot\frac{39}{99}=0{,}16$, т.е. вероятность того, что обе груши сорта В, равна 0,16.

в) $P(A_1\cdot B_2+B_1\cdot A_2)=\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(B_2/A_1)+\mathrm{P}(B_1)\cdot P(A_2/B_1)=\frac{60}{100}\cdot\frac{40}{99}+\frac{40}{100}\cdot\frac{60}{99}=0{,}48$.

Таким образом, вероятность того, что одна груша сорта А, а другая груша сорта В, равна 0,48.

6.Два стрелка производят по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,8, а вероятность попадания в цель вторюю стрелка равна 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена или первым или вторым стрелком.

Решение.

Обозначим: А={цель поражена первым стрелком}, В={цель поражена вторым стрелком}, С= {цель поражена или первым стрелком, или вторым стрелком}/

По условию имеем: Р(А) = 0,8, Р(В) = 0,7 , С = А + В.

Так как события Аи В совместные (в цель могут попасть оба стрелка одновременно), то получим:

Р(С) = Р(А + В) = Р(А) + Р(В) - Р(А В) = 0,8 + 0,7 – 0,8 0,7 = 0,94 .

Итак, вероятность того, что цель будет поражена или первым, или вторым стрелком, равна 0,94.

7.В цехе ремонта локомотивного депо находится 5 неисправных и 6 отремонтированных локомотивов. Случайным образом выбирают 4 локомотива. Найти вероятность того, что среди них имеется: а) только 2 отремонтированных локомотива; б) меньше, чем 2 отремонтированных локомотива; в) хотя бы 1 отремонтированный локомотив.

Решение.

а) Пусть событие A= {среди 4 выбранных локомотивов только 2 отремонтированных}, тогда два других выбранных локомотива – неисправны. Найдём вероятность события Aпо классической формуле вероятности:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m - число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A, n - число всевозможных элементарных исходов.

Произошло событие A, состоящее в одновременном (совместном) появлении двух событий: A_1 = {выбрали 2 отремонтированных локомотива из 6 отремонтированных локомотивов находящихся в депо} и A_2= {выбрали 2 неисправных локомотива из 5 неисправных находящихся в депо}, т.е. произошло событие, являющееся произведением событий A_1 и A_2.

Определим число случаев, благоприятствующих наступлению события A. Число способов выбора 2 отремонтированных локомотивов из имеющихся 6 отремонтированных, равно C_6^2, а 2 неисправных локомотива из 5 неисправных - C_5^2. Из совместности событий A_1 и A_2, следует, что $m=C_6^2\cdot C_5^2$.

Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле.

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!},$$

тогда

$$m=C_6^2\cdot C_5^2=\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=150.$$

Определим число всевозможных элементарных исходов. По условию задачи нужно выбрать 4 локомотива из 11 (5 неисправных и 6 отремонтированных). Их можно выбрать C_{11}^4, различными способами, т.е. $n=C_{11}^4$. Тогда

$$n=C_{11}^4=\frac{11!}{4!\cdot(11-4)!}=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=330.$$

Получаем: $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{150}{330}=\dfrac{5}{11}$.

б) Пусть событие B= {среди 4 выбранных локомотивов меньше, чем *2* отремонтированных локомотива). Произошло событие В, состоящее в появлении, хотя бы одною из двух событие: B_1 = {выбрали 1 отремонтированный и 3 неисправных локомотива} и B_2= {вынули 0 отремонтированных и 4 неисправных локомотива), т.е. событие, являющееся суммой событий B_1 и B_2.

Посчитаем число способов для события B_1. Число способов выбора 1 отремонтированного локомотива из имеющихся 6 отремонтированных, равно C_6^1. Каждому такому выбору соответствует C_5^3 способов выбора 3 неисправных локомотивов из *5* неисправных находящихся в депо. Так как события C_6^1и C_5^3наступают одновременно, то $m_1=C_6^1\cdot C_5^3$.

Посчитаем число способов для события B_2. Число способов выбора 0 отремонтированных локомотивов из имеющихся 6 исправных, равно C_6^0. Каждому такому выбору соответствует C_5^4, способов выбора 4 неисправных локомотивов из 5 неисправных находящихся в депо. Так как эти события C_6^1и C_5^4 наступают одновременно, то $m_2=C_6^0\cdot C_5^4$.

Из несовместности событий B_1 и B_2 следует, что $m=m_1+m_2=C_6^1\cdot C_5^3+C_6^0\cdot C_5^4$.

Поэтому $m = C_6^1 \cdot C_5^3 + C_6^0 \cdot C_5^4 = \dfrac{6!}{1!\cdot(6-1)!} \cdot \dfrac{5!}{3!\cdot(5-3)!} + \dfrac{6!}{0!\cdot(6-0)!} \cdot \dfrac{5!}{4!\cdot(5-4)!} = 60 + 5 = 65$.

$$n = C_{11}^4 = 330$$

Получаем: $P(B) = \dfrac{65}{330} = \dfrac{13}{66}$.

в) Пусть событие C = {среди выбранных локомотивов хотя бы один исправный локомотив). Тогда противоположное событие $\overline{C}$ = (среди выбранных локомотивов нет ни одного отремонтированного), то есть все выбранные локомотивы - неисправны. Из теоремы сложения вероятностей двух противоположных событий, следует $P(C) = 1 - P(\overline{C})$. Для события $\overline{C}$ число благоприятствующих исходов было подсчитано в пункте б), а общее число элементарных исходов в пункте а): $m = C_6^0 \cdot C_5^4 = 5$, $n = C_{11}^4 = 330$.

$$P(\overline{C}) = \frac{m}{n} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}.$$

Тогда $P(C) = 1 - \dfrac{1}{66} = \dfrac{65}{66}$.

Ответ: а) $\dfrac{5}{11}$, б) $\dfrac{13}{66}$, в) $\dfrac{65}{66}$

8.В урне содержится 6 черных и 7 белых шаров. Случайным образом вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них имеется:
а) ровно 3 белых шара;
б) меньше, чем 3 белых шара;
в) хотя бы 1 белый шар.

Решение: а) Пусть событие A – среди вынутых шаров ровно три белых (тогда два других вынутых шара – черные). Вероятность этого события найдем, используя классическое определение вероятностей: P (A)=$\frac{m}{n}$, где *n*– число равновозможных элементарных исходов, *m* – число элементарных исходов, благоприятствующих данному событию. Элементарными исходами являются сочетания из 13 элементов по 5,т.е. $n = C_{13}^5 = \frac{13!}{5!(13-5)!} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$ =1287;число исходов, благоприятствующих данному событию $m = C_7^3 \cdot C_6^2 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} \cdot \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = 525$.
Получим P(A)=$\frac{525}{1287} = 0{,}408$

б) Пусть событие B – среди вынутых шаров меньше чем три белых шара. Это возможно, когда вынули 0 белых шаров и 5 черных или 1 белый шар и 4 черных или 2 белых шара и 3 черных шара. Поэтому $m = C_7^0 \cdot C_6^5 + C_7^1 \cdot C_6^4 + C_7^2 \cdot C_6^3 = 531$ Получаем P(B) = $\frac{531}{12870} = 0{,}413$

в) Пусть событие C – среди вынутых шаров хотя бы один белый шар. Перейдем к противоположному событию$\overline{C}$ – среди вынутых шаров нет ни одного белого, то есть все шары – черные. Следовательно$m = C_6^5 \cdot C_7^0 = 6$
Получаем: P($\overline{C}$) = $\frac{6}{1287} = 0{,}005$, тогда P(C) = 1 – 0,0005 = 0,9995.

Ответ: а) 0,408 б) 0,413 в) 0,9995.

9.Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистические исследования показали, что вероятности выделения кредита этими банками равна соответственно $P_1 = 0{,}6$ $P_2 = 0{,}5$ $P_3 = 0{,}8$. Банки выделяют кредит независимо друг от друга и, если примут решение о его выделении в размере: первый – 50 млн. руб., второй – 40 млн. руб. и третий – 90 млн. руб. Введем следующие события:
A – первый банк выделил кредит;
B – второй банк выделил кредит;
C – третий банк выделил кредит;

D – предприятие получит кредит в размере 90 млн. руб.;
E – предприятие получит кредит в размере не менее 130 млн. руб.
В этих условиях требуется:
1)Записать события D и E через события A, B, C.
2)Найти вероятности события D и E.

Решение:

Рассмотрим событие D. Предприятие получит кредит в размере 90 млн. руб. в двух случаях: 1) первый и второй банк выделили кредит, а третий не выделил кредит – событие D_1; 2) кредит выделил только третий банк – событие D_2. При этом $D_1 u D_2$ несовместны и
$D = D_1 + D_2$.

Событие D_1 будет иметь место, если одновременно будут иметь место A, B и событие не C, т.е. $\overline{C}$. Значит $D_1 = A \cdot B \cdot \overline{C}$. Аналогично получим $D_2 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

Получим

$D = A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C.$ $P(D) = P(D_1) + P(D_2) = P(A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)$
$= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C)$

Данные преобразования были выполнены на основании теорем о вероятности суммы и произведения.

P($\overline{A}$) = 1 – 0,6 = 0,4 , P($\bar{B}$) = 1 – 0,5 = 0,5 , P($\bar{C}$) = 1 – 0,8 = 0,2

Тогда вероятность события D равна
P(D) = 0,6*0,5*0,2 + 0,4*0,5*0,8 = 0,22

Событие E произойдет в трех случаях:
Предприятие получит кредит 140 млн. руб. - E_1
Предприятие получит кредит 130 млн. руб. - E_2
Предприятие получит кредит 180 млн. руб. - E_3
При этом $E_1 = A \cdot \overline{B} \cdot C$; $E_2 = \overline{A} \cdot B \cdot C$; $E_3 = A \cdot B \cdot C$.
P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 0,6*0,5*0,8 + 0,4*0,5*0,8 + 0,6*0,5*0,8 = 0,64

Ответ: P(D) = 0,22; P(E) = 0,64.

10. На сборочное предприятие поступили комплектующие с трех заводов в количестве: 35 – с первого завода; 25 – со второго завода; 40 – с третьего завода. Вероятность качественного изготовления изделия на первом заводе 0,6; на втором – 0,8; на третьем – 0,7. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным? Какова вероятность того, что качественное изделие будет с первого завода?

Решение:

Дано: Комплектующие изделия поступили с трех заводов: 1 – 35; 2 – 25; 3 – 40.
Всего – 100 изделий.
Испытание: случайным образом берется одно изделие.
Событие А: взятое изделие – качественное.
Найти: P(A), PA(B_1)
Событие А связано с гипотезами
B_1 - взятое изделие изготовлено на первом заводе;
B_2 - взятое изделие изготовлено на втором заводе;
B_3 - взятое изделие изготовлено на третьем заводе.
B_1, B_2, B_3 - образуют полную группу несовместных событий, так как заводов только три и взяли только одно изделие.
Можно использовать формулу полной вероятности:
$P(A) = P(B_1)$*PB_1(A)+P(B_2)*PB_2(A)+P(B_3)*PB_3(A).
P(B_1) , P(B_2) , P(B_3) можно найти по определению P(B) = $\frac{m}{n}$
P(B_1) $= \frac{35}{100} =$ 0,35 P(B_2) = $\frac{25}{100}$ = 0,25 P(B_3) = $\frac{40}{100}$ = 0,4
PB_1(A) = 0,6; PB_2(A) = 0,8 PB_3(A) = 0,7
Подставим данные значения в формулу полной вероятности, получим:

P(A) = 0,35*0,6+0,25*0,8+0,4*0,7 = 0,69

Вероятность того, что качественное изделие будет с первого завода, найдем по формуле Байеса:

PA(B_1) = $\frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}6}{0{,}69}$ = 0,30

Ответ: P(A) = 0,69, PA(B_1) = 0,30.

11. Три вагоностроительных завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 50%, второй - 20%, а третий - 30% всей продукции. Первый завод выпускает 1% брака, второй завод - 2% и третий - 3%. Наудачу отобранный вагон оказался с браком. Найти вероятность того, что вагон произведен вторым заводом.

Решение.

Обозначим:

A = {отобранный вагон оказался с браком},

B_1 = {вагон произведен на первом заводе),

B_2 = { вагон произведен на втором заводе},

B_3 = { вагон произведен на третьем заводе}.

$$P(B_1) = 0{,}5\,,\ P(B_2) = 0{,}2\,,\ P(B_3) = 0{,}3\,.$$

A/B_1 = {вагон, изготовленный на первом заводе, оказался с браком),

A/B_2 = { вагон, изготовленный на втором заводе, оказался с браком},

A/B_3= { вагон, изготовленный на третьем заводе, оказался с браком}.

$$P(A/B_1) = 0{,}01\,,\ P(A/B_2) = 0{,}02\,,\ P(A/B_3) = 0{,}03\,.$$

Тогда

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + P(B_3)\cdot P(A/B_3) =$$
$$= 0{,}5\cdot 0{,}01 + 0{,}2\cdot 0{,}02 + 0{,}3\cdot 0{,}03 = 0{,}005 + 0{,}004 + 0{,}009 = 0{,}018\,.$$

Следовательно, вероятность события, состоящего в том, что отобранный вагон с браком равна 0,018.

Вероятность того, что деталь, проработавшая положенное время, взята из второй партии, определим по формуле Байеса.

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}02}{0{,}018} = \frac{0{,}004}{0{,}018} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}\,.$$

Таким образом, вероятность того, что вагон с браком изготовлен на втором заводе, равна $\frac{2}{9}$

12. Вероятность того, что человек находящейся на перроне станции, ожидает электричку, равна 0,5. Найти вероятность того, что среди отобранных 8 человек, ровно 6 ожидают электричку.

Решение.

Обозначим событие *A* = {из 8 отобранных человек 6 ожидают электричку}, $n = 8$, $m = 6$ По условию $p = 0{,}5$, тогда $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. По формуле Бернулли имеем:

$$P_8(6) = C_8^6\cdot p^6\cdot q^{8-6} = \frac{8!}{6!\cdot(8-6)!}\cdot 0{,}5^6\cdot 0{,}5^2 = \frac{7\cdot 8}{1\cdot 2}\cdot 0{,}5^8 = \frac{56}{2^9} = \frac{7}{2^6} = \frac{7}{64} = 0{,}1094\,.$$

Итак, вероятность того, что из 8 отобранных человек на перроне ровно 6 ожидают электричку, равна 0,1094.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №11
По заданному условию построение рядов распределения случайной величины

Цель: приобрести навык решения прикладных задач на построение рядов распределения случайной величины.

Задание:

1. На станции находится 5 человек. Вероятность того, что человек, находящейся на перроне станции, ожидает электричку равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины X — количества людей, ожидающих электричку на перроне

Контрольные вопросы для защиты:

1. Какая величина называется случайной?
2. Какая случайная величина называется дискретной?
3. Опишите схему Бернулли. Какие элементарные события повторяются в этих опытах?
4. Запишите формулу Бернулли.
5. Что называется законом распределения случайной величины?
6. Какой закон распределения называется биномиальным?

<u>Ответы и комментарии:</u>

1.Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа выпадения герба.

Решение.

Возможны следующие значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Зная, что вероятность выпадения герба в одном испытании равна1/2, найдем вероятности значений случайной величины X по формуле Бернулли:

$$P(A_{5,0}) = C_5^0 p^0 q^5 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(A_{5,1}) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P(A_{5,2}) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$

$$P(A_{5,3}) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

$$P(A_{5,4}) = C_5^4 p^4 q^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

$$P(A_{5,5}) = C_5^5 p^5 q^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

Закон распределения имеет вид:

Значения x_i	0	1	2	3	4	5

Вероятности p_i	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Проверка: 1/32+5/32+10/32+10/32+5/32+1/32=1.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №12
Нахождение вероятности и числовых характеристик случайной величины при решении профессиональных задач

Цель: приобрести навык нахождения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины законом распределения.

Задание:

1.Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*. Найти: а) вероятность p_5;б) математическое ожидание $M(X)$; в) дисперсию $D(X)$; г) среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.

x_i	-10	-7	1	2	5
p_i	0,25	0,2	0,15	0,1	p_5

2.На вокзале 4 склада. Вероятность того, что требуемый товар имеется на этих складах одинакова и равна 0,75. Составить закон распределения числа складов, на которых искомый товар имеется. Найти математическое ожидание, дисперсию дискретной случайной величины. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить графически функцию распределения.

Контрольные вопросы для защиты:

1. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?
2. Что называется дисперсией случайной величины?
3. Запишите формулу для вычисления среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины.

Ответы и комментарии:

1.Дискретная случайная величина задана таблицей:

x_1	2	4	5	10	12
p_1	0,1	0,15	0,3	0,2	p_5

Найти p5, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение. Построить многоугольник распределения. Найти и изобразить функцию распределения.

Решение:

Для любой дискретной случайной величины $\sum_{i=1}^{n} x_1 \cdot p_1 = 1$

Получаем: 0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,2 + p5 = 1. Отсюда p5 = 1 – 0,75 = 0,25. То есть ряд распределения имеет вид:

x_1	2	4	5	10	12
p_1	0,1	0,15	0,3	0,2	0,25

Математическое ожидание найдем по формуле M(X) = $\sum_{i=1}^{n} x_1 \cdot p_1$

Получаем M(X) = 2*0,1 + 4*0,15 + 5*0,3 + 10*0,2 + 12*0,25 = 7,3.

Дисперсию найдем по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2)$=$\sum_{i=1}^{n} x_1{}^2 \cdot p_1$.

Получаем $M(X^2)$ = 4*0,1 +16*0,15 + 25*0,3 + 100*0,2 + 144*0,25 = 0,4 + 2,4 + 7,5 + 20 + 36 = 66,3

Тогда $D(X)$= 66,3 – $(7,3)^2$ = 13,01.

Среднее квадратичное отклонение найдем по формуле $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Получаем $\sigma(0x) = \sqrt{13{,}01} = 3{,}61.$

Построим многоугольник распределения: Если 10< $x \leq 12$, то F(x) = 0,1 + 0,15 +0,3 + 0,2

Функция распределения задается формулой $F(x) = P(X < x)$.

Будем задавать различные значения x и находить соответствующие значения функции.

Если x≤2, то $F(x) = 0$

Если 2<x≤4, то $F(x)$= 0,1

Если 4<x≤5, то $F(x)$= 0,1 + 0,15 = 0,25

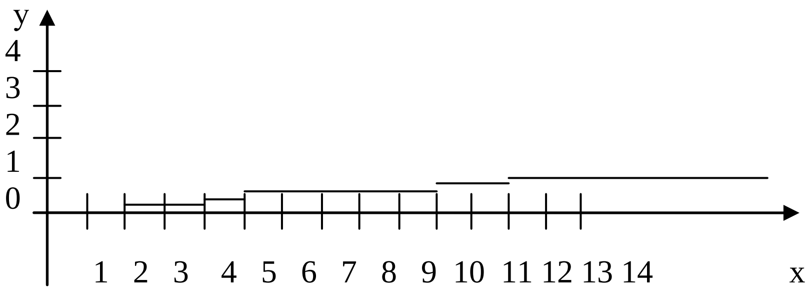
Если 5<x≤10, то $F(x)$= 0,1 + 0,15 + 0,3 = 0,55

Если 10<x≤12, то $F(x)$= 0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,2 = 0,75

Если 12<x, то $F(x)$ = 0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,2 + 0,25 = 1.

Получаем:$F(x) = \begin{cases} 0, если x \leq 2 \\ 0{,}1\ , если 2 < \text{x} \leq 4 \\ 0{,}25\ , если 4 < \text{x} \leq 5 \\ 0{,}55\ \ , если 5 < \text{x} \leq 10 \\ 0{,}75\ \ , если 10 < \text{x} \leq 12 \\ 1, если 12 < \text{x} \end{cases}$

Построим график функции распределения:



Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №13
Вычисление интегралов методом прямоугольников, трапеций и парабол. Оценка погрешности

Цель: приобрести навык при приближенном вычислении определенных интегралов приближенными методами: парабол, прямоугольников, трапеций.

Задание: 1.Вычислить 3 способами (методами прямоугольников, трапеций и парабол) определенный интеграл, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

Вычислить погрешность приближения: $\int_0^4 x^2\,dx$

Контрольные вопросы для защиты:

1. Что называется абсолютной погрешностью и запишите формулу?
2. Что называется относительной погрешностью и запишите формулу?
3. Что такое определенный интеграл?
4. Объясните суть понятия численное интегрирование и укажите в каких случаях прибегают к численному интегрированию?
5. Назовите методы численного интегрирования..
6. Записать формулу вычисления интеграла методом прямоугольника

Ответы и комментарии:

1.*а)* методом трапеций

Здесь *n=10;* тогда $\Delta x = (b-a)/n = 0.4$. Точками деления являются: $x_0 = 0;$ $x_1 = 0.4;$ $x_2 = 0{,}8;$ $x_3 = 1{,}2;$ $x_4 = 1{,}6;$ $x_5 = 2;$ $x_6 = 2{,}4;$ $x_7 = 2{,}8;$ $x_8 = 3{,}2;$ $x_9 = 3{,}6;$ $x_{10} = 4$.

Найдем значения функции в точках деления: $y_0 = 0;$ $y_1 = 0{,}16;$ $y_2 = 0{,}64;$ $y_3 = 1{,}44;$ $y_4 = 2{,}56;$ $y_5 = 4;$ $y_6 = 5{,}76;$ $y_7 = 7{,}84;$ $y_8 = 10{,}24;$ $y_9 = 12{,}96;$ $y_{10} = 16;$

Используя формулу, получим:

$$\int_0^4 x^2\,dx \approx 0{,}4\left(\frac{0+16}{2} + 0.16 + 0.64 + 1.44 + 2.56 + 4.0 + 5.76 + 7.84 + 10.24 + 12.96\right) = 21.44$$

Точное значение интеграла определяем по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^4 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = \frac{64}{3} = 21.33$$

Найдем относительную погрешность приближенного вычисления:

$$\delta = \frac{21.44 - 21.33}{21.44}\cdot 100\% \approx 0.5\%$$

б) по формуле Симпсона

Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей. Тогда $(b-a)/3n = 3/30 = 1/10 = 0.1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y = x^2$ значения аргумента $x_0 = 1,\ x_1 = 1{,}3;\ x_3 = 1{,}6;\dots\ x_{10} = 4,$ найдем соответствующие значения ординат:
$y_0 = 1,\ y_1 = 1{,}69;\ y_2 = 2{,}56;\ y_3 = 3{,}61;\ y_4 = 4{,}84;\ y_5 = 6{,}25;\ y_6 = 7{,}84;\ y_7 = 9{,}61;\ y_8 = 11{,}56;$
$y_9 = 13{,}69;\ y_{10} = 16.$

Применяя формулу Симпсона, получим:

$$\int_1^4 x^2 dx = 0.1((1+16)+2(2.56+4.84+7.84+11.56)+4(1.69+3.61+6.25+9.61+13.69)) = 21$$

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Практическое занятие №14
Решение задач на нахождение по таблично заданной функции, функции, заданной аналитически. Исследование свойств этой функции

Цель*:* уметь решать задачи на нахождение по таблично заданной функции (при n=2), функции, заданной аналитически.

Задание: Для функции, заданной таблично, найти аналитическое выражение функции.

x	1	2	3	4	5
y	18	42	78	126	186

Контрольные вопросы для защиты:

1. Записать формулу приближенного дифференцирования, основанную на первой интерполяционной формуле Ньютона.
2. Записать формулу шага интерполяции
3. Записать формулу первой конечной разности
4. Записать формулу второй конечной разности
5. Записать формулу третьей конечной разности

<u>Ответы и комментарии:</u>

1)Составим таблицу конечных разностей для заданной функции (для этого вычислим конечные разности)

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	18	24	12	0
1	2	42	36	12	0
2	3	78	48	12	
3	4	126	60		
4	5	186			

В данном примере конечные разности третьего порядка равны нулю, а все конечные разности второго порядка равны 12. Это говорит о том, что функцию, заданную таблично, можно представить многочленом второй степени.

Используя данные последней таблицы и интерполяционную формулу Ньютона с учетом $h = x_{i+1} - x_i = 1$, $q = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{x-1}{1}$ получаем:

$$y = P_n(x) = 18 + (x-1)\cdot 24 + \frac{(x-1)(x-2)}{2!}\cdot 12 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}\cdot 0$$

$$y = P_2(x) = 18 + (x-1)\cdot 24 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\cdot 12$$

$$\Rightarrow y = f(x) = 6x^2 + 6x + 6$$

2) Исследуем свойства функции $f(x) = 6x^2 + 6x + 6$:

а) $D(f) = R$;

б) $E(f) = [4{,}5;+\infty)$;

в) функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида;

г) нулей функции нет (т.к. в уравнении $6x^2 + 6x + 6 = 0,\ D < 0$, следовательно, оно не имеет корней);

д) исследуем функцию на монотонность:

$$f'(x) = \left(6x^2 + 6x + 6\right)' = 12x + 6$$

$$f'(x) = 0, \Rightarrow \quad 12x + 6 = 0$$

$$x = -0{,}5$$

x	$(-\infty;-0{,}5)$	-0,5	$(-0{,}5;-\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	убывает		возрастает

при $x \in (-\infty;-0{,}5)$ - функция убывает, при $x \in (-0{,}5;-\infty)$ - функция возрастает;

е) $f(x) > 0$ при любом *x;*

ж) функция непрерывна.

Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» *– баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.

Практическое занятие №15
Метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель: приобрести навык решения прикладных задач с использованием метода Эйлера.
Задание: Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' + 2y = x$ методом Эйлера, если $x \in [0;1]$, $h = 0{,}1$. $y(0) = 1$. Решение оформить в виде таблицы, также в виде графика.

Контрольные вопросы для защиты:

1. В чем состоит суть приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка по методу Эйлера?
2. В каких случаях применяется способ Эйлера.

Ответы и комментарии:

Решить задачу Коши для дифференциального решения $y' = y^2 - x$, $y(1) = 0$ на отрезке [1, 3] методом Эйлера с шагом $h = 0{,}2$ и с шагом $h = 0{,}1$. Изобразить решение графически. Оценить погрешность.

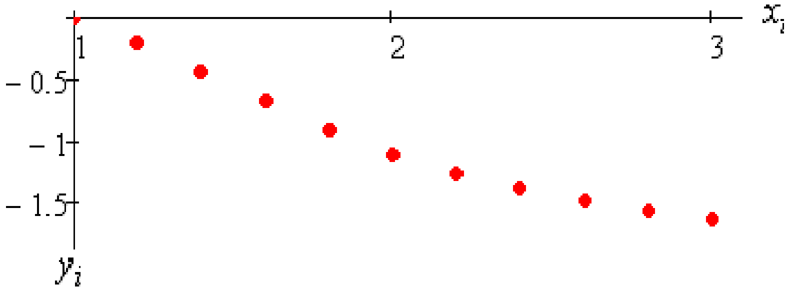
Решение.

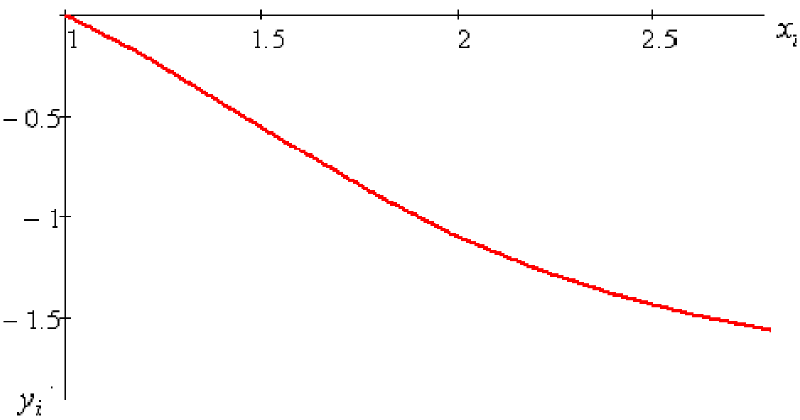
Вычисления с шагом $h = 0.2$:

$$x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ i = 0, 2, \ldots, 9,\ x_{i+1} = 1. + 0.2(i+1), y_{i+1} = y_i + 0.2 \cdot \left(y_i^2 - x_i\right)$$

Ниже приведены: таблица значений приближённого решения в узлах равномерной сетки с шагом $h = 0.2$, график приближённого решения и ломаная Эйлера.

x_i	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y_i	0	-0.2	-0.432	-0.675	-0.904	-1.1	-1.258	-1.382	-1.48	-1.562	-1.634





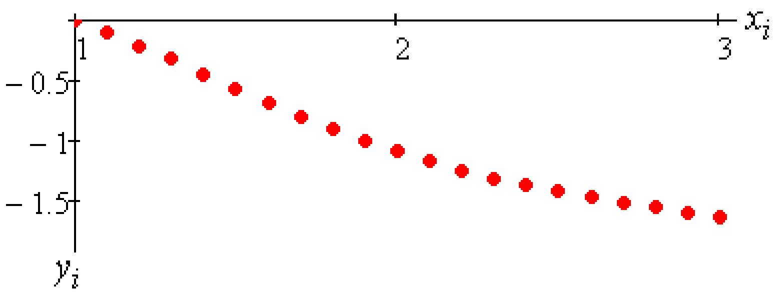
Вычисления с шагом половинным h = 0.1:

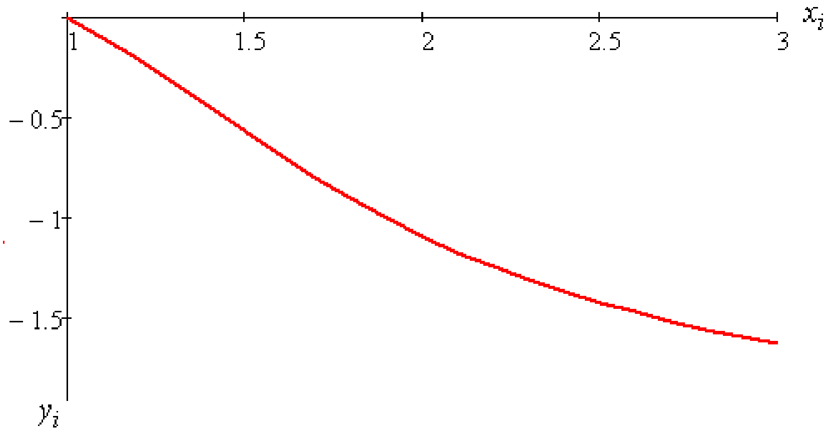
$$x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ i = 0, 2, \ldots, 19,\ x_{i+1} = 1. + 0.1(i+1),\ y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot \left(y_i^2 - x_i\right)$$

Ниже приведены: таблица значений приближённого решения в узлах равномерной сетки с половинным шагом h = 0.1, график приближённого решения и ломаная Эйлера.

x_i	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y_i	0	-0.1	-0.209	-0.325	-0.444	-0.564	-0.683	-0.796	-0.903	-1.001	-1.091

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
-1.172	-1.245	-1.31	-1.368	-1.421	-1.469	-1.513	-1.554	-1.593	-1.629

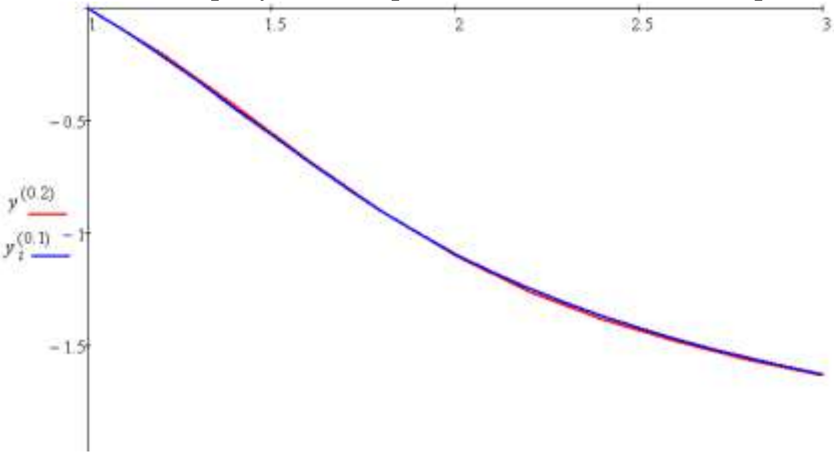




Погрешность вычислений можно положить равной

$$\max_i \left| y_i^{(0.2)} - y_{2i}^{(0.1)} \right| = 0.014.$$

Ниже на рисунке изображены обе ломаные Эйлера.



Контролируемые компетенции: ОК 01, ОК 02

Критерии оценки:

«5» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнены все задания в работе и процент правильности хода решения и вычислений не менее 86%; аккуратное оформление выполняемой работы; обоснованные выводы, правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, обобщает материал.*

«4» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 76% заданий и ход решения правильный; незначительные погрешности в оформлении работы; правильная, но неполная интерпретация выводов.*

«3» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено не менее 61% всех заданий, подход к решению правильный, но есть ошибки; значительные погрешности в оформлении работы; неполная интерпретация выводов.*

«2» – *баллов выставляется обучающемуся, если выполнено менее 60% всех заданий, решение содержит грубые ошибки; неаккуратное оформление работы; неправильная интерпретация выводов либо их отсутствие.*

Перечень вопросов для подготовки к экзамену:

1. Какое число называют комплексным?
2. Как найти модуль комплексного числа?
3. Как найти аргумент комплексного числа?
4. Какие комплексные числа называются сопряженными?
5. Какие существуют формы комплексных чисел?
6. Дать определение графа.
7. Какие детали при изображении графа не важны?
8. Что называется маршрутом?
9. Что называется цепью?
10. Что называется циклом?
11. Что такое степень вершины графа?
12. Что называется цепью?
13. Какое число называют комплексным?
14. Что представляет собой число *i*?
15. Что называется маршрутом?
16. Какие существуют формы комплексных чисел?
17. Что называется циклом?
18. Какая функция называется сложной? Приведите примеры.
19. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
20. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
21. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
22. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
23. Приведите примеры использования производной при определении скорости различных процессов.
24. В чем заключается признак возрастания и убывания функции?
25. В чем заключается необходимый признак существования экстремума?
26. В чем заключается достаточный признак существования экстремума?
27. Как отыскивают экстремумы функции с помощью второй производной?
28. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции?
29. В чем различие между нахождением наибольшего и наименьшего значений функции?
30. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
31. Как записать всю совокупность первообразных функций?
32. Что называется неопределенным интегралом?
33. Почему интеграл называется неопределенным?
34. Что означает постоянная С в определении неопределенного интеграла?
35. Что такое определенный интеграл?
36. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
37. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
38. Может ли площадь криволинейной трапеции быть отрицательной?
39. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равной нулю и почему?
40. Приведите примеры физических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.
41. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
42. Уравнение какого вида называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?

43. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения действительные и различные?
44. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения действительные и равные?
45. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения мнимые?
46. Какое общее решение имеет дифференциальное уравнение, если все корни характеристического уравнения комплексные?
47. Найти общее решение уравнений $y'' - 7y' + 10y = 0$.
48. Определение дифференциального уравнения первого порядка?
49. Назвать алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися
50. переменными.
51. Определение дифференциального уравнением второго порядка?
52. Определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
53. Назвать алгоритм решения дифференциального уравнения второго порядка?
54. Дайте определение ДУЧП.
55. Что такое порядок ДУЧП?
56. Какова классификация ДУЧП?
57. Геометрическая интерпретация ДУЧП.
58. Что такое характеристики ДУЧП?
59. Что называется числовым рядом?
60. Что называется частичными суммами ряда?
61. Перечислите основные задачи комбинаторики.
62. Что называется n- факториалом?
63. Что называется перестановками?
64. Что называется перемещениями?
65. Что называется сочетаниями?
66. Вычислите число перестановок из 5 предметов.
67. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
68. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
69. В корзине 5 белых, 3 черных и 7 полосатых шаров. Чему равна вероятность достать наугад одноцветный шар?
70. Что называется условной вероятностью?
71. Как формулируется теорема умножения вероятностей?
72. Какая величина называется дискретной?
73. Что называется законом распределения случайной величиной?
74. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величиной?
75. Что называется дисперсией случайной величины?
76. Какой закон распределения называется биномиальным?
77. Методы приближенного вычисления интеграла
78. Запишите формулу прямоугольников
79. Как вычислить определенный интеграл по формуле прямоугольников?
80. В чем состоит смысл вычисления определенного интеграла по формуле трапеций?
81. Как вычислить определенный интеграл по формуле Симпсона?
82. Что понимается под законом больших чисел?
83. Что такое приближенное дифференцирование?
84. Что такое шаг интерполяции?
85. Как найти шаг интерполяции?

86. Как найти первую конечную разность?
87. Как вычислить q?
88. Что называют задачей Коши?
89. Какой применяют метод для решения задачи Коши?
90. В чем состоит суть метода Эйлера?
91. Что такое шаг разбиения?
92. Как вычислить абсолютную погрешность?
93. Дайте определение производной.
94. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.
95. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
96. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?
97. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
98. В чем заключается механический смысл производной?

Типовой вариант экзаменационного билета

Вариант 1

КУ-54

ОТЖТ- структурное подразделение ОрИПС – филиала СамГУПС

Рассмотрено на заседании предметной (цикловой) комиссии «____» ________________ 2023 г. Председатель ПЦК____________ Л.Б.Овечкина	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1 ОП.10 Математика Группа Семестр III	УТВЕРЖДАЮ Заместитель директора по учебной работе СПО (ОТЖТ) ________________ П. А. Грачев «___»______ 2023 г.

Оцениваемые компетенции:

ОК 01, ОК 02, ПК 1.3, ПК 2.1, ПК 3.1, ЛР2,4,23,30

Инструкция для обучающихся

Экзаменационная работа включает 21 задание по основным разделам математики: линейная алгебра, теория множеств и графов, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы.

Часть 1содержит 15 заданий с кратким решением (1-15) по 1 баллу, Часть 2 состоит из заданий с развернутым решением (16-19) по 2 балла и (20-21) по 3 балла.

Критерии оценки

Отметка (оценка)	Количество правильных ответов в %	Количество правильных ответов в баллах
5 (отлично)	86-100	27-29
4 (хорошо)	76-85	23-26
3 (удовлетворительно)	61-75	19-22
2 (неудовлетворительно)	0-60	0-18

Время выполнения заданий – 180 минут

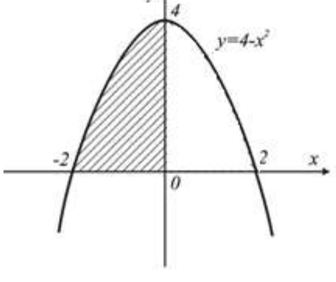
Часть 1. Представьте краткое решение

1. (1 балл) Найдите производную функции $\gamma = e^{-5x}$

2. (1 балл) Найдите вторую производную $\gamma''(x)$ функции $\gamma = 7x^2 + 3x + 1$

3. (1 балл) Найдите множество всех первообразных функции $\gamma = 3x$

4. (1 балл) Запишите интеграл, с помощью которого можно вычислить площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке



5. (1 балл) Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $\gamma = x^2 - 3x + 4$ в точке $x_0 = -2$.

6. (1 балл) Дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид:

1) $\dfrac{dy}{dx}\cos x = \dfrac{y}{\ln x}$ 2) $y'' + 2y' + y = 0$ 3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$ 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 16x^3$

7. (1 балл)Какая последовательность соответствует заданной формуле $\{x_n\}\left\{\frac{1}{n}\right\}$:

1)1, 2, 3, $\ldots n$ 2)$1, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots \frac{1}{n}; \ldots$

3)2, 4, 6, 8, $\ldots 2n$ 4)$1; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2n}$

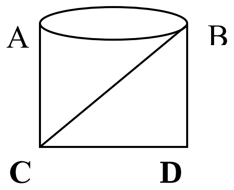
8.(1 балл) Найдите четвертый член числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{(-1)^n}{3n-1}$

9.(1 балл) Найдите значение ординаты y_2 при вычислении определённого интеграла $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+1}$ методом прямоугольников, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

10.(1 балл) В урне 14 белых и 2 черных шара. Из урны берут один шар. Найдите вероятность того, что шар окажется белым.

11.(1 балл) Даны два множества: A={2; 4; 5; 8; 11; 12} и B={0; 1; 2; 3; 4; 5}. Найдите пересечение данных множеств.

12.(1 балл) Определить степень вершины А графа.



13.(1 балл). Найти сумму комплексных чисел: $z_1 = 5 + 3i$ и $z_2 = 3 - 7i$

14.(1 балл) Найти вероятность p_5 для дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	*2*	*5*	*8*	*10*	*12*	*15*
p	*0.1*	*0.15*	*0.05*	*0.25*	p_5	*0,2*

15.(1 балл) Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	*2*	*5*	*8*
p	*0.1*	*0.2*	*0.7*

Часть 2. Представьте развёрнутое решение

16. (2 балла) Найдитеопределённыйинтеграл $\int_1^2 (4u+1)^2 du$

17. (2 балла) Найдите общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\sin x}{e^y} = 0$

18. (2 балла) Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$.

19.(2 балла) Фигура, ограничена указанными линиями: $y = 2x - x^2, y = 2 - x$. Запишите определённый интеграл, выражающий площадь этой фигуры, сделайте чертеж.

20.(3 балла) Три вагоностроительных завода выпускают одинаковые изделия, причем первый завод производит 60%, второй - 30%, а третий 10% всей продукции. Первый завод выпускает 1% брака, второй завод - 4% и третий 1%. Наудачу отобранный вагон оказался с браком. Найти вероятность того, что вагон произведен вторым заводом.

21.(3 балла) Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЭДС которого равна 5В, а внутреннее сопротивление равно 3 Ом. Какое сопротивление должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность? Найдите максимальное значение мощности. При каком сопротивлении нагрузки полезная мощность источника тока максимальна.

Преподаватель ____________________________

Эталоны ответов

№ заданий в тесте или билете	1	2	3	4
№ правильного ответа	а)$\gamma' = e^{-5x}(-5)$	14x+3	$F(x) = \frac{3x^2}{2} + C$	$S = \int_{-2}^{0} 4 - x^2 dx$

№ заданий в тесте или билете	5	6	7	8
№ правильного ответа	*y=-7x*	*1*	2	$\frac{1}{11}$

№ заданий в тесте или билете	9	10	11	12
№ правильного ответа	0.171	224	(2;4)	10

№ заданий в тесте или билете	13	14	15	16
№ правильного ответа	8-4i	0.25	6.8	1

№ заданий в тесте или билете	17	18	19	20
№ правильного ответа	0,1	2,3	165	$e^y = -\frac{x^2}{2} + C$

№ заданий в тесте или билете	21	22	23
№ правильного ответа	6,84	$\frac{4}{3}$	$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Отметка (оценка)	Количество правильных ответов в %	Количество правильных ответов в баллах
5 (отлично)	86-100	27-29
4 (хорошо)	76-85	23-26
3 (удовлетворительно)	61-75	19-22
2 (неудовлетворительно)	0-60	0-18